PROBLÈMES CLASSIQUES ET PROLÈMES OUVERTS

On peut définir un "**problème classique"** par les caractéristiques suivantes :

1 - Le problème posé a toujours une solution.
2 - C'est une application du cours.
3 -L'énoncé contient toutes les données nécessaires à la résolution du problème.
4 - L'objectif le plus fréquent assigné à cette activité est l'évaluation.

Si l'on supprime toutes les données nécessaires à la modélisation, on obtient un "**problème ouvert"** .

Le terme " problème ouvert " a été introduit par une équipe de l'IREM de Lyon, en 1984.

CARACTÉRISTIQUES DE L'ÉNONCÉ D'UN PROBLÈME OUVERT

Le choix et la rédaction de l'énoncé jouent un rôle déterminant. L'énoncé doit piquer la curiosité de l'élève, il doit susciter chez lui un sentiment de défi intellectuel et motiver sa recherche.

Voici les principales caractéristiques de ces énoncés :

• L'énoncé est assez bref, facile à comprendre, exprimé simplement pour être très accessible aux élèves;

• La solution n'est pas évidente et elle n'est surtout pas donnée par l'énoncé. Les problèmes du type "démontrer que " sont éliminés;

• Tout élève peut démarrer sa recherche par tâtonnement, par des dessins, par des essais numériques, il peut engager une procédure de réponse partielle ;

• L'énoncé n'induit pas la méthode de résolution, l'élève n'est pas guidé dans sa recherche, les problèmes qui amènent à la solution par une série de questions intermédiaires sont éliminés ;

• Le problème se situe dans un champ de connaissances où l'élève peut prouver la validité de ses conjectures ;

• Les problèmes où la solution est accessible par plusieurs modes de raisonnement (algébrique, géométrique,..) sont particulièrement intéressants.

L'ACTIVITÉ « PROBLÈME OUVERT » S'INTÈGRE PARFAITEMENT DANS LES PROGRAMMES

Au niveau du collège, dans l'introduction commune à l'ensemble des disciplines scientifiques (BO n° 6 du 19 avril 2007 - Hors Série), les auteurs insistent sur la démarche d'investigation (p. 6). Ils définissent le canevas d'une séance d'investigation en identifiant sept étapes. Nous en citerons quatre qui sont en lien direct avec la pratique du problème ouvert :

« L'appropriation du problème par les élèves [...]
***La formulation** de conjectures, **d'hypothèse** explicatives, de protocoles possibles :*
- formulation orale ou entité de conjectures ou d'hypothèses par les élèves (ou les groupes) ;
- élaboration éventuelle d'expériences destinées à tester ces hypothèses ou conjectures ;
- communication à la classe des conjectures ou des hypothèses [...]
L'investigation ou la résolution de problèmes conduites par les élèves :
*- moment de débat interne **au groupe d'élèves ;***
- [...]
-description et exploitation des méthodes et des résultats : recherche d'éléments de justification et de preuve, confrontation avec les conjectures et les hypothèses formulées précédemment.
L'échange argumenté autour des propositions élaborées :
- communication au sein de la classe des solutions élaborées, des réponses apportées, des résultats obtenus, des interrogations qui demeurent ;
- confrontation des propositions, débat autour de leur validité, recherche d'arguments ; en mathématiques, cet échange peut se terminer par le constat qu'il existe plusieurs voies pour parvenir au résultat attendu et par l'élaboration collective d'une preuve. »

Cette démarche d'investigation est reprise dans l'introduction générale des programmes de mathématiques (p. 11).

« [...] Les mathématiques comme discipline de formation générale :
Au collège, les mathématiques contribuent avec d'autres disciplines à entraîner les élevés à la pratique d'une démarche scientifique. L'objectif est de développer conjointement et progressivement tes capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique. Elles contribuent ainsi à la formation du futur citoyen.
À travers la résolution de problèmes, la modélisation de quelques situations et l'apprentissage progressif de la démonstration, les élèves prennent conscience petit à petit de ce qu'est une véritable activité mathématique : identifier et formuler un problème, conjecturer un résultat en expérimentant sur des exemples, bâtir âne argumentation, contrôler les résultats obtenus en évaluant leur pertinence en fonction du problème étudié, communiquer une recherche, mettre eu forme une solution. »

Dans l'introduction des programmes de seconde *(cf.* BO n° 2 du 30 août 2001,p31)',on peut lire:

« Chercher, trouver des résultats partiels, se poser des questions, appliquer des techniques bien comprises, étudier une démonstration qu'on n'aurait pas trouvée soi-même, expliquer oralement une démarche, rédiger au brouillon puis au propre, etc., sont quelques-uns des aspects de cette activité. »

Ces extraits montrent que l'activité problème ouvert s'inscrit tout à fait dans les objectifs de l'institution concernant l'acquisition de méthodes et de démarches. De plus, suivant le travail et la production des élèves pendant la recherche, le professeur peut être amené à introduire une connaissance nouvelle pour débloquer la situation. Par exemple, pour le problème de la diagonale du rectangle (énoncé 4, p. 21), le théorème de Thaïes peut être utilisé pour prouver que la diagonale passe ou ne passe pas par un nœud du quadrillage. Dans ce dernier cas, on parlera de « situation-problème » *(cf.* p. 71).

LA RECHERCHE SE FAIT EN CLASSE.

Plusieurs raisons, entres autres :

- Observer les élèves pendant la recherche (voir comment ses élèves utilisent les concepts mathématiques étudiés antérieurement, savoir quelles connaissances ils sont capables de mobiliser correctement, quelles erreurs ils commettent).
- Faire travailler ses élèves en groupe (le groupe de quatre paraissant le plus approprié).
- La séance de recherche est suivie d'une séance de mise en commun des résultats et de débats de validation des solutions proposées par chaque groupe.

GESTION D'UNE SÉANCE DE PROBLÈME OUVERT (*Source : André Pressiat)*

FICHE élève	Les problèmes ouverts Comment ça se passe ?

Le professeur va te donner un énoncé mathématiques et ça va être à toi de prouver s'il est vrai ou faux !
Pour que tu puisses le faire, il te faut trois moments différents… et l'aide des autres !

***1ER TEMPS* : La recherche individuelle**

Tu vas lire l'énoncé mathématique et tu vas chercher un peu tout seul comment faire pour y répondre.
Pour ça tu prends une feuille de brouillon et tu marques toutes les idées qui te viennent en tête.

***2E TEMPS* : Le travail en groupe**

Vous allez vous regrouper par quatre pour chercher ensemble et regrouper vos idées.
Pour que ça se passe bien et pour travailler efficacement, il va falloir que chacun prenne une responsabilité :

1. Celui qui est le porte parole du groupe :

C'est à lui que le professeur demandera si tout va bien et c'est lui qui signalera tout problème de dysfonctionnement dans le groupe. Il sera aussi le porte parole lors du débat.

2. Celui qui est responsable de la prise de parole et du respect des autres :

Il doit s'assurer que tout le monde s'écoute et se laisse bien la parole. Il doit faire attention à ce que personne ne se dispute et doit veiller au fait qu'il n'y ait pas trop de bruit.

3. Celui qui est responsable du temps :

Il doit surveiller le temps qui passe et vérifier que les recherches avancent et que la rédaction de l'affiche se fait à temps.

4. Celui qui est responsable de l'affiche :

C'est lui qui rédige l'affiche de façon claire et lisible. Le but du travail de groupe est de faire une affiche qui permette d'expliquer au reste de la classe votre réponse et comment vous avez fait pour trouver. Elle doit être claire et lisible par les autres élèves qui ne sont pas du groupe. Sur l'affiche doit apparaître clairement les différents rôles pris par les élèves.

***3E TEMPS* : Débat sur les affiches**

Tout le monde reste en groupe. Le professeur va montrer à l'ensemble de la classe une première affiche.
Nous allons ensemble observer l'affiche, et si vous ne la comprenez pas bien, vous pouvez poser des questions au groupe qui l'a faite. Puis, en groupe vous allez décider si vous êtes d'accord ou pas avec l'affiche présentée. Vous en discutez ensemble, vous donnez vos arguments, mais vous n'êtes pas obligés de vous mettre d'accord.
Le porte parole du groupe dit au professeur ce que chaque élève pense. Le professeur marque au tableau les différents arguments . Puis tous ensemble, nous discutons de chaque argument.

FICHE élève	Règles du débat

Pour pouvoir débattre correctement en mathématiques, il nous faut des règles :
1. Un énoncé de mathématiques est soit vrai soit faux.
2. En mathématiques, si on trouve un exemple qui montre que l'énoncé est faux, cela suffit pour dire que l'énoncé est faux.
3. En mathématiques on n'invente pas des propriétés, on utilise celles qui sont vues en classe.
4. Même si la majorité des élèves (ou même tous les élèves) pensent que le résultat est vrai, cela ne suffit pas pour affirmer que c'est bien vrai.
5. Pour dire en mathématiques qu'un énoncé est vrai, il ne suffit pas de donner des exemples.
6. Ca ne suffit pas de constater que l'énoncé est vrai sur un dessin.

QUELQUES "CLASSIQUES" DES PROBLÈMES OUVERTS

Exemple 1 : Les fractions égyptiennes

On appelle "fractions égyptiennes" les fractions dont le numérateur est égal à 1. Par exemple $\frac{1}{3};\frac{1}{6};\frac{1}{2}$

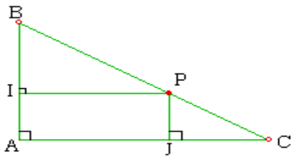
Vérifie que : $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$.

Cherche d'autres cas où la somme de deux fractions égyptiennes est égale à une fraction égyptienne.
Essaie de trouver des méthodes....

Exemple 2 : Un problème isopérimétrique

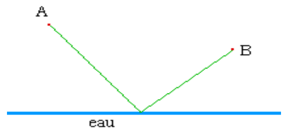
Jean possède un fil barbelé de 75 mètres de long. Il veut clôturer son jardin avec ce fil. Ce jardin doit être rectangulaire. Il veut aussi qu'il soit le plus grand possible (c'est-à-dire qu'il puisse planter le plus de salades possible, par exemple). Comment doit-il faire ?

Exemple 3 : Plus court chemin (1) ABC est un triangle rectangle en A. Où faut-il placer P sur l'hypoténuse pour que la longueur IJ soit la plus petite possible ?



Exemple 4 : Plus court chemin (2) (classe de troisième)

Toto part de A, prend de l'eau et va en B.
Pourrais-tu lui tracer le chemin le plus court ?



Exemple 5 : Somme et produit

Le nombre 27 peut s'écrire, de plusieurs façons, comme une somme d'entiers naturels.
Par exemple : 27 = 20 + 7. Ou encore : 27 = 2 + 5 + 7 + 13.
Trouve parmi toutes ces sommes celle dont le produit des termes est maximum. Et avec d'autres nombres ?

Exemple 6 : Droites remarquables dans un triangle

Etant données trois droites concourantes, tracer un triangle dont les trois droites sont les hauteurs.
Etant données trois droites concourantes, tracer un triangle dont les trois droites sont les médianes

Exemple 7

Dans la cour d'une ferme, il y a des poules et des lapins. J'ai pu compter 91 têtes. J'ai compté aussi 324 pattes.
Pourrais-tu m'aider à trouver le nombre de poules ? Le nombre de lapins ?

Exemple 8

Deux tours, hautes de 30 m et de 40 m, sont distantes l'une de l'autre de 50 m. Un puits est situé entre les deux tours. Deux oiseaux s'envolent en même temps du sommet de chaque tour et volent à la même vitesse.
Peux tu déterminer la position du puits sachant que les oiseaux se posent dessus au même instant ?

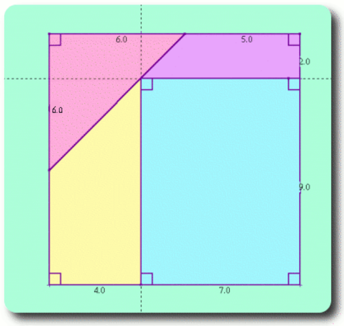
Exemple 9 : Intersections
Quel nombre maximum de points d'intersections peut-on obtenir entre un rectangle et deux cercles ?

Exemple 10 : La corde

Une corde non élastique de 101 mètres est attachée au sol entre deux piquets distants de 100 mètres. Tam tire la corde en son milieu et la lève aussi haut qu'il le peut.
Peut-il passer en dessous sans se baisser ?
Données numériques : Tam mesure 1m68.

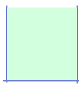
Exemple 11 : **La course à 20**
Peter propose à Wendy de jouer avec lui à la course à 20... Il commence en écrivant au choix 1 ou 2. Wendy ajoute 1 ou 2 au nombre de Peter. Peter, à son tour, ajoute 1 ou 2 au nombre de Wendy. Et ainsi de suite, chacun à tour de rôle ! Peter a vite trouvé une stratégie pour gagner à chaque fois.
Trouve-la et explique-la à Wendy !

Exemple 12

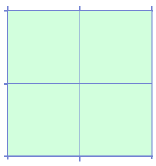


Le puzzle (*D'après Guy Brousseau et André Pressiat)*
Consigne 1 :
Les élèves étant par groupe de 4, il s'agit de construire le puzzle pour que le segment qui mesure 4cm au départ mesure 6 cm. Chaque groupe décide de sa méthode puis chaque membre confectionne une pièce. On vérifie chaque essai en reconstituant le puzzle. Pour finir, chaque groupe réalise une affiche expliquant sa méthode.
Consigne 2 :
Même consigne en transformant le segment qui mesure 7cm au départ en un segment qui mesure 9cm.

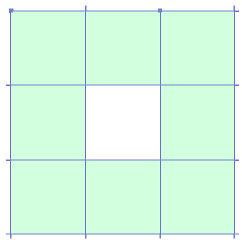
Exemple 13
Les carrés bordés (*D'après un problème de l'IREM de Marseille exposé lors de la CII du 14 octobre 2005)*
On construit plusieurs carrés à partir d'un même carré de une unité de côté et on s'intéresse au nombre de carrés sur la bordure.



Le carré unité.



Construction à partir de 2 carrés unités.
4 carrés en bordure.



Construction à partir de 3 carrés unités.
8 carrés en bordure.

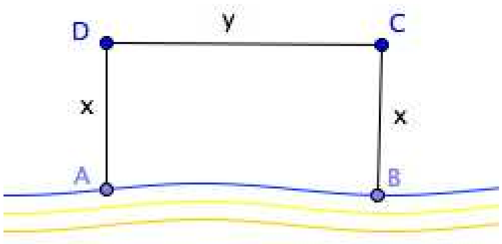
Combien y aura-t-il de carrés en bordure si on fait une construction à partir de 4 carrés unités ?
Même question pour 89 carrés unités ?

Exemple 14
Construire deux carrés de sorte que le deuxième ait une aire double de celle du premier.

Exemple 15 : **Le problème du maître-nageur**
Un maître-nageur dispose d'une corde de 160m de longueur pour délimiter une aire rectangulaire de baignade surveillée. Où doit-il placer les bouées A et B pour que la zone de baignade ait une aire maximale ? Que vaut alors cette aire ?
(La longueur totale du cordon est de 160m, la zone de baignade obtenue a une forme rectangulaire)

Résolution du problème du maître-nageur avec l'utilisation du tableur

⇨ **Schématisation du problème**



⇨ **Une approche numérique**

1. Quelles valeurs peut-on donner à « x » ?
2. Faire des essais avec des valeurs de « x » qui vous semblent probables.

⇨ **Une résolution mathématique**

1. La ficelle est représentée par la ligne polygonale A D C B. , donc x + y + x désigne la longueur de la ficelle, donc : x + y + x = … ; donc y = …. ?
2. Exprimer en fonction de « x » l'aire de la zone de baignade.

On trouvera x(160 – 2x).

3. À l'aide de la calculatrice dresser un tableau de valeurs probables pour « x » allant de 5 en 5 par exemple.
4. Peut-on ainsi avoir une approche d'une solution ?

⇨ **Utilisation d'un tableur**

a) Dans la cellule A1 écrire « Valeur de *x* »
Dans la cellule B1, écrire : « aire de la zone de baignade ».
Dans la colonne A, rentrer les valeurs de 0 à …
(à vous de déterminer) par pas de 1.
b) Que faut-il écrire dans la cellule B2 ?
c) Compléter alors la colonne B.
d) Peut-on lire dans ce tableau la valeur qu'il faut donner à *x* pour que l'aire de la zone de baignade soit maximale ?
e) Créer un graphique de type « nuage de points », avec en abscisses les valeurs de « *x* » en
mètres es et en ordonnées l'aire de la baignade en m². Afficher le graphique.
f) Peut-on répondre au problème de façon plus certaine ?

	A	B
1	Valeur de *x*	Aire de la zone de baignade
2	0	
3	1	
4	2	
5	3	

<u>Ce que peut apporter une telle activité</u> :
Donnée à la maison sous forme d'un problème ouvert, cette activité peut être l'occasion de faire une recherche numérique de la solution, d'affiner cette recherche par une résolution plus « mathématique » et trouver la solution avec la calculatrice !
Bien sûr l'outil tableur, si l'on sait s'en servir est plus performant…