

Algèbre, outil de démonstration

L'algèbre est bien souvent synonyme chez les élèves d'équations. Ainsi certains peuvent se lancer dans des résolutions d'équations là où il n'y a qu'expression littérale. Il paraît donc intéressant de trouver des exercices où l'algèbre s'illustre avant tout comme outil de démonstration. Voici quelques exemples accessibles à des élèves de quatrième.

Exercice : Programme de calcul

Ce type d'exercice très classique permet de donner une certaine dimension à l'outil algébrique et tout particulièrement à la réduction d'expressions littérales. Grâce à l'algèbre des constatations « magiques » sur des programmes de calculs peuvent s'expliquer.

1. Voici un programme de calcul :

- Teste ce programme de calcul avec plusieurs nombres.
- Que constates-tu ? Démontre cette constatation.

- Choisir un nombre
- Lui retrancher 3
- Multiplier le résultat obtenu par 2
- Ajouter 6
- Puis retrancher le double du nombre de départ

2. Juliette propose le programme de calcul ci-contre :

- Teste ce programme de calcul avec plusieurs nombres.
- Alex affirme que l'on peut obtenir le même résultat avec un programme de calcul ayant seulement deux étapes.
Retrouve le programme de calcul proposé par Alex.

- Choisir un nombre
- Lui ajouter 3
- Multiplier le résultat obtenu par 5
- Ajouter 6
- Puis retrancher le triple du nombre de départ

Exercice : Une suite de nombres

Il permet d'aborder la question cruciale : qu'est ce que démontrer ? Pour beaucoup d'élèves, tout particulièrement dans le cadre numérique, la constatation sur quelques exemples peut suffire à établir une démonstration. Ici l'utilisation du tableur peut aider les élèves à tester différents exemples, mais aussi à visualiser l'emploi de la lettre (en lien avec les cellules de la feuille tableur), en utilisant la barre formule. En effet après une première page de calcul où les six termes sont calculés les uns à la suite des autres, on pourra demandé aux élèves de calculer directement le 5^e nombre et la somme des six nombres de cette suite. S'imposera alors dans les formules la référence aux seules cellules contenant les deux premiers termes de cette suite, le passage à la lettre est alors plus naturel, et la réduction devient nécessaire (si on ne veut pas écrire des formule trop longue...).

Niveau : 4^e (et même fin de 5^e)

Prérequis : Distributivité simple - Réductions d'expressions

Voici une liste de six nombres :

2 3 5 8 13 21

Les deux premiers sont choisis au hasard, et les suivants sont obtenus en ajoutant les deux qui précèdent:

5 a été obtenu en faisant $2 + 3$

8 a été obtenu en faisant $3 + 5 \dots$

Zoé observe que si elle ajoute les six nombres, elle obtient une somme S qui est égale à 4 fois le 5^{ème} nombre de la liste.

- En refaisant les calculs, vérifie que Zoé a raison.
- Choisis deux autres nombres au départ, écris la liste des six nombres que tu obtiens.
 - Démontre que l'observation de Zoé est toujours vraie !

Exercices en lien avec une " géométrie dynamique "

Certains exercices de géométrie peuvent être prétexte à l'utilisation de l'outil algébrique pour démontrer, après conjecture, des propriétés métriques par exemple. Dans un premier temps l'emploi d'un logiciel de géométrie dynamique permet de visualiser et de conjecturer les invariants de la figure et les variables. La conjecture émise, on pourra la vérifier sur un exemple numérique donné puis introduire une lettre pour exprimer une longueur variable (dans les exemples ci-dessous), puis exprimer certaines grandeurs en fonction de cette variable en utilisant des propriétés de géométrie, et passer ainsi du champ géométrique au champ algébrique pour parvenir à démontrer.

1 - Niveau 4^e - Prérequis : Propriété de Thalès

Sur la figure ci-contre $ABCD$ est un parallélogramme.

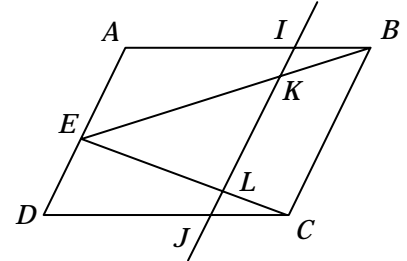
La droite (IJ) est parallèle à la droite (BC) .

E est un point sur le segment $[AD]$.

Les droites (EB) et (IJ) se coupent en K , les droites (EC) et (IJ) se coupent en L .

L'unité de longueur est le centimètre

On donne $AB = 5$, $AD = 7$ et $IB = 1$.



Calculer la longueur KL

2 - Niveau : 4^e Prérequis : Distance d'un point à une droite; Calculs d'aires.

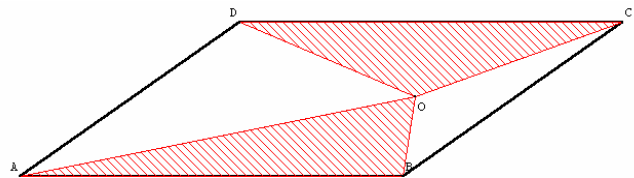
Sur le fichier de Géoplance :

$ABCD$ est un parallélogramme.

L'unité de longueur est le centimètre

On donne $AB = 10$, $AD = 7$ et $BH = 5$.

On place un point O à l'intérieur de $ABCD$.



- 1) a) Faire calculer et afficher l'aire de la partie hachurée.
b) Déplacer le point O , quel le conjecture peut-on faire ?
- 2) Démontrer cette conjecture.

Exercice : Une autre démonstration du théorème de Pythagore

Niveau : 4^e

Prérequis : Calcul littéral ;

Méthode de résolutions d'équations ;

Calcul d'aires de triangles et de trapèzes.

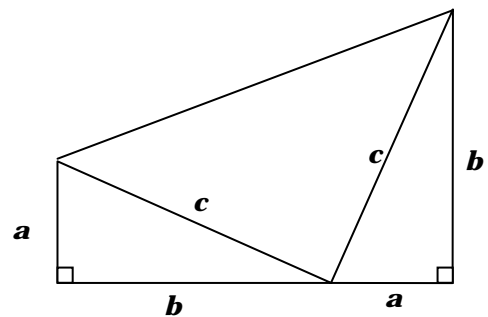
Cet exercice de synthèse est assez riche et peut donc être donné en devoir à la maison, en expliquant clairement son but :

Démontrer le théorème de Pythagore ou encore que l'on a bien la relation suivante :

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Les étapes de ce travail peuvent être plus ou moins détaillées. On pourra demander, par exemple :

- 1) a) Quelle est la nature de $ABCD$?
b) En déduire une expression de l'Aire de $ABCD$ en fonction de a , b et c .
- 2) Ce quadrilatère $ABCD$ peut être découpé en trois triangles.
Peux-tu les citer et justifier la nature de chacun d'entre eux.
En déduire une deuxième expression de l'aire de $ABCD$.
- 3) a) En utilisant les deux expressions de cette même aire, écrire une égalité
b) Démontrer alors que l'on obtient la relation $a^2 + b^2 = c^2$



Commentaires : cette dernière question étant difficile et originale dans la méthode, on pourra faire le point avec les élèves dans les différentes égalités qu'ils obtiennent et essayer de dégager avec eux la méthode à suivre pour toucher au but final.