DIFFÉRENTS TYPES DE RAISONNEMENT RENCONTRÉS AU COLLÈGE

sixième				
	Organisation de données	Nombres et calculs	Géométrie	Grandeurs et mesures
Raisonnement déductif		***Critères de divisibilité***	• Propriétés des droites parallèles et perpendiculaires • Propriétés de la symétrie axiale ***• Propriété des diagonales d'un rectangle*** • Propriété caractéristique de la médiatrice d'un segment par l'équidistance • Construction d'une bissectrice à la règle et au compas par la symétrie axiale	
Mise en évidence d'un contre exemple				• Deux figures ayant le même périmètre, n'ont pas forcément la même aire (et inversement)
Raisonnement par disjonction des cas		• Comparaison des décimaux		
Approche du raisonnement par l'absurde				

cinquième				
	Organisation de données	Nombres et calculs	Géométrie	Grandeurs et mesures
Raisonnement déductif		• Distributivité • Ramener une division dont le diviseur est décimal à une division dont le diviseur est entier • Produit de 2 nombres en écriture fractionnaire • Tester si une égalité comportant 1 ou 2 nombres indéterminés est vraie lorsqu'on leur attribue des valeurs numériques	***• Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu*** • Caractérisation angulaire du parallélisme • Somme des angles d'un triangle • Point de concours des 3 médiatrices des côtés d'un triangle, cercle circonscrit • Propriétés de la symétrie centrale • Dans un triangle une médiane d'un partage ce	
Mise en évidence d'un contre exemple	• Prouver la non-proportionnalité d'une situation			
Raisonnement par disjonction des cas		• Comparaison des nombres relatifs • Addition et soustraction des nombres relatifs		
Approche du raisonnement par l'absurde			• Justification de l'impossibilité de tracer certains triangles (inégalité triangulaire, somme des angles) • Caractérisation angulaire du non-parallélisme	

quatrième				
	Organisation de données	Nombres et calculs	Géométrie	Grandeurs et mesures
Raisonnement déductif	• Produit en croix	• Multiplication et division des nombres relatifs • Règles de calcul sur les puissances (les résultats sont obtenus en s'appuyant sur la signification de la notation puissances et non par l'application de formules) • Double distributivité • Comparer deux nombres est équivalent à chercher le signe de leur différence	• Triangle et droite des milieux • Triangle et parallèles • ***Le théorème de Pythagore*** • Caractérisation du triangle par son inscription dans un demi-cercle dont le diamètre est un côté du triangle • Distance d'un point à une droite • Construction d'une bissectrice à la règle et au compas • Caractérisation de la bissectrice d'un angle par l'équidistance • Point de concours des bissectrices des angles d'un triangle, cercle inscrit • Effet des agrandissements et réductions sur le parallélisme, l'orthogonalité et les longueurs	
Mise en évidence d'un contre exemple			• Travail sur de fausses égalités avec les puissances	
Raisonnement par disjonction des cas		• Effet de la multiplication sur l'ordre		
Approche du raisonnement par l'absurde			• Caractérisation d'un triangle non rectangle par la « non-égalité » de Pythagore • Caractérisation du non-parallélisme par la droite des milieux	

troisième				
	Organisation de données	Nombres et calculs	Géométrie	Grandeurs et mesures
Raisonnement déductif	• Proportionnalité des accroissements pour une fonction affine (par exemple en utilisant la tangente)	• Diviseurs communs de deux entiers, PGCD (algorithme des différences, algorithme d'Euclide) • Propriétés des racines carrées et des puissances • Identités remarquables • $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ et $\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$	• Réciproque du théorème de Thalès • Effet d'un agrandissement ou d'une réduction de rapport *k* sur les surfaces et les volumes • Relations trigonométriques	
Mise en évidence d'un contre exemple		• ***Propriété sur les radicaux*** • Travail sur des égalités fausses avec les racines carrées		
Raisonnement par disjonction des cas		• Equations $x^2 = a$	• Théorème de Thalès • Angles inscrits, angles au centre	
Approche du raisonnement par l'absurde		• Résolution de A(x).B(x)=0 • Mise sous forme irréductible d'une fraction par le PGCD • ***Irrationalité de $\sqrt{2}$***	• Caractérisation du non-parallélisme par la non égalité des rapports de longueurs	

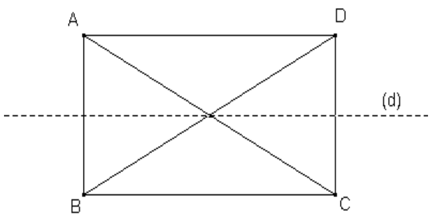
EXEMPLES DE DÉMONSTRATIONS AVEC DIFFÉRENTS TYPES DE RAISONNEMENT

1. Raisonnement déductif

1.1 Propriété des diagonales d'un rectangle (sixième)

*En sixième, la symétrie axiale est mise en jeu le plus fréquemment possible pour **justifier** les propriétés. Cf. commentaires page 12 du BO du 9 sept. 2004*

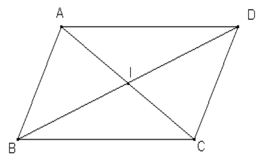
Propriété : les diagonales d'un rectangle ont la même longueur.



Données :
Soit ABCD un rectangle et soit (d) un axe de symétrie de ce rectangle.
Par la symétrie d'axe (d) :
Le point A a pour image B, le point C a pour image D donc [AC] a pour image [BD].
Les symétries conservent les longueurs.
Conclusion :
AC = BD.

1.2 Propriété du parallélogramme (cinquième)

Propriété : les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.



Données :
Soit ABCD un parallélogramme et soit I le milieu du segment [AC].
- L'image, par la symétrie de centre I, de la droite (AB) est la droite (DC).
- L'image, par la symétrie de centre I, de la droite (BC) est la droite (AD).

L'image, par la symétrie de centre I, du point B (*intersection des droites (AB) et (BC)*) est le point D (intersection des droites (DC) et (AD))
Conclusion :
I est donc aussi le milieu du segment [BD].

1.3 Critères de divisibilité (sixième)

À ce niveau de sixième, il ne s'agit pas de démonstration formelles mais plutôt de justifications. L'idée est de montrer comment cela peut se justifier à partir d'un exemple..

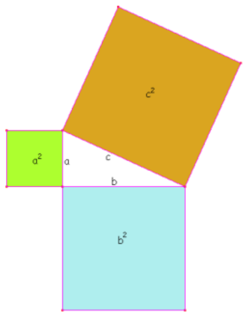
Exemple *: divisibilité par 4.*
Prenons un nombre de trois chiffres, comme 520.
520 = 5 × 100 + 20. Le chiffre des centaines « 5 » ne nous intéresse pas car 100 est un multiple de 4 ***(l'étude de la notion de multiple et de diviseur relève du collège)****.*
D'où l'idée de savoir si le nombre formé par les deux derniers chiffres n'est pas un multiple de 4.

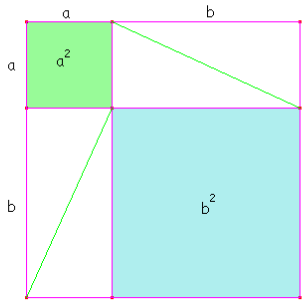
Autre exemple *: divisibilité par 9.*
258 est-il divisible par 9 ?
On peut écrire :
258=200 + 50 + 8. On a : 200 = 2 × 99 + 2
50 = 5 × 9 + 5
8 = 8
D'où l'idée de regarder si la somme des trois chiffres n'est pas un multiple de 9.

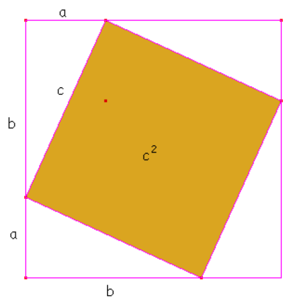
1.4 Le théorème de Pythagore avec les aires (quatrième)

Dans le préambule des programmes on peut lire : « Dans le cadre du socle commun, qui doit être maîtrisé par tous les élèves, c'est la première étape, « recherche et production d'une preuve » qui doit être privilégiée, notamment par une valorisation de l'argumentation orale. La mise en forme écrite ne fait pas partie des exigibles.

On peut parfois susciter une idée de démonstration par une argumentation orale, sans trace écrite.





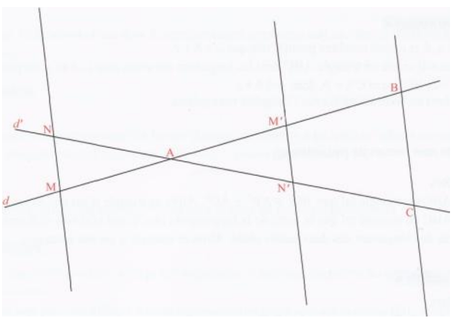


2. Raisonnement par disjonction des cas

Théorème de Thalès (troisième)

Soit *d et d'* deux droites sécantes en A. Soient B et M deux points de *d*, distincts de A. Soient C et N deux points de *d'* distincts de A. Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles alors :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$



Soit *d* et *d'* deux droites sécantes en A. Soit B et M deux points de *d*, distincts de A.
Soit C un point de *d'* distinct de A.
La parallèle à (BC) passant par M coupe la droite *d'* en N.

Premier cas : M est un point du segment [AB]. On est alors, dans la configuration de classe de quatrième et on peut conclure.

Deuxième cas : M est un point de la demi-droite [AB) extérieur au segment [AB]. Alors en échangeant le rôle des points B et C avec celui des points M et N, on se ramène encore à la configuration de classe de quatrième et on peut conclure.
Troisième cas : M est un point extérieur à la demi-droite [AB).
Soit M'et N' les symétriques respectives des points M et N par rapport au point A.
La droite (M'N') est l'image par cette symétrie centrale de la droite (MN) donc (M'N') est parallèle à (MN). On en déduit que (M'N') est parallèle à (BC).
D'après les deux premiers cas étudiés, on a donc : $\frac{AM'}{AB} = \frac{AN'}{AC} = \frac{M'N'}{BC}$
Or une symétrie centrale conserve les distances donc AM = AM', AN = AN' et
MN = M'N'. Donc $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

3. Mise en évidence d'un contre-exemple

Propriété sur les radicaux (troisième)
Il existe des nombres a *et* b *tels que* $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
Démonstration :
Soient $a = 16$ *et* $b = 9$.
Alors $\sqrt{a+b} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$
Par ailleurs : $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$.
On a $5 \neq 7$ donc *il existe des nombres* a et b *tels que* $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

4. Raisonnement par l'absurde

Propriété sur les radicaux (troisième)
$\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel.
Démonstration :
Supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel. On écrit $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec *p* et *q* des entiers premiers entre eux. On va ensuite déduire de l'équation $q^2 = 2p^2$ que *p* et *q* sont pairs. Ce qui est en contradiction avec le choix de *p* et *q* qu'on a fait (ils sont premiers entre eux).
Parfois on traite de raisonnement, par l'absurde, un simple raisonnement utilisant la contraposée. Par exemple,

- on veut démontrer que $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est vraie,
- on suppose non $\mathcal{Q}$,
- on finit par démontrer non $\mathcal{P}$ et on se dit en contradiction avec $\mathcal{P}$ mais $\mathcal{P}$ ne nous a pas servi. Il n'y a donc pas de contradiction mais une simple contraposée.