LE LOTO SPORTIF

par Arnaud de Labriolle et Jérémie Robert, élèves de TS au Lycée Montaigne de Bordeaux.

Enseignant: Pierre Grihon

Chercheur : Laurent Habsieger

1) Le sujet de recherche

Une grille de loto sportif se compose de 13 lignes et de 3 colonnes.

On coche une case dans chaque ligne , et on compare avec une grille de référence correspondant aux résultats de 13 rencontres.

On peut gagner avec 0 erreur, au plus une erreur, au plus 2 erreurs avec évidemment des gains décroissants...

On cherche le nombre N minimal de grilles à remplir pour gagner à coup sûr dans chacun de ces cas.

2) Avec 0 erreur

Il suffit(!!) de remplir toutes les grilles possibles soit 3^{13} . Est-ce bien raisonnable?

3) Avec 1 erreur

Supposons choisie la grille de référence.

Le nombre de grilles avec une erreur exactement est de 26 : il y a 13 lignes où l'erreur peut se trouver et dans chaque ligne 2 cases possibles. Avec la grille exacte, il y a donc 27 grilles ayant au plus une erreur.

Si les 3^{13} grilles possibles étaient rangées en groupes à l'intérieur desquels le nombre de cases différentes est au plus de 1, il y aurait au moins $3^{13}/27$ groupes , car ces groupes peuvent avoir des grilles communes. Le nombre de groupes disjoints est donc au minimum de 3^{10} = 59049.

En jouant une grille de chacun de ces groupes, on couvrirait toutes les possibilités.

Le nombre N est donc ici supérieur ou égal à 59 049.

4) Avec 2 erreurs

a) Il y a déjà 27 grilles ayant au plus une erreur par rapport à la grille de référence.

Cherchons maintenant le nombre de grilles ayant exactement 2 erreurs.

Il y a 13 choix pour la ligne de la première erreur, puis 12 choix pour la deuxième, soit 13x12

choix mais il n'y a pas de raison de privilégier une erreur (la première) donc en fait il y en a $\frac{13x12}{2}$ soit 78.

Dans chaque ligne, il y a 2 choix de case donc finalement, nous avons 78 x 4 grilles ayant exactement 2 erreurs et donc 78 x 4 + 27 = 339 grilles ayant au plus 2 erreurs.

Si nous généralisons à une grille à n lignes et toujours 3 colonnes, cela donne $2n^2 + 1$.

Avec le même raisonnement que pour 3), on voit donc que le nombre N est supérieur à $\frac{3^{13}}{339}$ soit 4703.

b) Nous avons voulu ensuite chercher un majorant de N à l'aide d'un ordinateur.

Nous codons les grilles de la manière suivante :

A pour une case cochée dans la première colonne, B dans la deuxième, C dans la troisième.

Par exemple AABCBABBBCAAC.

L'ordinateur choisit une grille au hasard et élimine de la liste les grilles présentant au plus 2 erreurs avec cette grille.

Il choisit ensuite une grille au hasard parmi les grilles restantes et élimine de la liste de celles-ci toutes les grilles présentant au plus 2 erreurs avec la grille choisie. Et ainsi de suite jusqu'à épuisement de toutes les grilles.

Dans le cas de 7 lignes, nous avons trouvé 73 grilles pour recouvrir toutes les possibilités, c'est à dire qu'en jouant ces 73 grilles, toute grille (et donc en particulier la grille de référence) a au plus deux erreurs par rapport à l'une de ces 73 grilles.

Celles-ci ayant été trouvées au hasard, on peut supposer qu'il y a un système de N grilles remplissant les mêmes conditions avec N ≤ 73.

Ainsi, pour 7 lignes, on peut affirmer que $\frac{3^7}{2x7^2+1} \leq N \leq 73$ soit $21 \leq N \leq 73$.