Problème DE SYRACUSE

par Vincent Bonnaccorsi, Jean-Marc Lacaze (1s), Christophe Roblin, Eric Vitasse (TS)

élèves au Lycée SUD MEDOC , au Taillan-Médoc(33).

Enseignantes: Carine Burbaud et Dominique Grihon.

Chercheur: Laurent Habsieger.

1)Le sujet

On part d'un entier n positif.

Si n est pair, on le transforme en n/2 ;

si n est impair, on le transforme en 3n+1.

Quel est le comportement de cette suite à long terme?

2)Premières observations

Si n = 6, on obtient la suite : 6-3-10-5-16-8-4-2-1.

Si n = 9, on obtient: 9-28-14-7-22-11-34-17-52-26-13-40-20-10-5-16-8-4-2-1.

Pour tous les nombres n dont nous sommes partis (de 1 à 100) puis davantage grâce à un programme sur ordinateur, la suite aboutit toujours à 1.

Nous nous sommes intéressés aussi à la longueur de cette suite que nous notons L(n).

Par exemple, L(6) = 9.

Mis à part les entiers n de la forme 2^p où la longueur vaut facilement p+1, nous n'avons pas trouvé de relation entre n et L(n).

Pour n compris entre 1 et 26, L(n) varie entre 1 et 24 mais L(27) = 112.

A ce jour, nous n'avons pas trouvé d'explication à cet écart.

Nous avons enfin observé des similitudes de longueurs en prenant certaines valeurs de n.

Nous avons constaté puis démontré que : L(8k + 4) = L(8k + 5) et L(16k + 18) = L(16k + 19).

3)Démonstrations de ces deux conjectures

a) $8k+4 \longrightarrow 4k+2 \longrightarrow 2k+1 \longrightarrow 6k+4$

$8k+5 \longrightarrow 24k+16 \longrightarrow 12k+8 \longrightarrow 6k+4$

Ceci montre qu'en 4 étapes , on retrouve le même nombre, donc :

L(8k + 4) = L(6k + 4) + 4 = L(8k + 5) pour k supérieur ou égal à 1.

b) $16k+18 \longrightarrow 8k+9 \longrightarrow 24k+28 \longrightarrow 12k+14 \longrightarrow 6k+7 \longrightarrow 18k+22$

$16k+19 \longrightarrow 48k+58 \longrightarrow 24k+29 \longrightarrow 72k+88 \longrightarrow 36k+44 \longrightarrow 18k+22$

Ceci montre qu'en 6 étapes, on retombe sur le même nombre.

On peut écrire L(16k + 2) = L(16k + 3) avec k supérieur ou égal à 1

4) Dans quels cas est-on sûr d'arriver à un nombre inférieur à n ?

a) Tout d'abord, voyons quel est l'intérêt de cette question.

Nous avons montré que si on était sûr que pour tout n, on arrivait à un nombre inférieur à n, alors la suite aboutirait toujours à 1.

Démonstration par récurrence:

Soit Pn la propriété: la suite débutant par n aboutit à 1.

Il est clair que P1 est vraie.

Supposons que $P_1, P_2, \ldots., P_{n-1}$ soient vraies. Alors, si l'on est sûr qu'en partant de n on arrivera à un nombre p strictement plus petit que n, l'hypothèse de récurrence s'applique à p et on aboutira alors à 1,

et donc P_n est vraie.

b)Le problème maintenant est de voir si effectivement on aboutit à un nombre plus petit que celui du départ.

b1)Si n=4k

$4k \longrightarrow 2k$ qui est inférieur à n

b2)Si n= 4k+2

$4k+2 \longrightarrow 2k+1$ idem

b3)Si n=4k+1

$4k+1 \longrightarrow 12k+4 \longrightarrow 6k+2 \longrightarrow 3k+1$ qui est inférieur strictement à n (k>0)

b4)Si n=4k+3

$4k+3 \longrightarrow 12k+10 \longrightarrow 6k+5 \longrightarrow 18k+16 \longrightarrow 9k+8$

La parité de 9k+8 n'est pas connue.

Il faut donc décomposer à nouveau ce cas suivant les valeurs de k.

A ce jour, nous n'avons rien trouvé de plus.