Les Nombres Parfaits.

Agathe CAGE, Matthieu CABAUSSEL, David LABROUSSE (2nde Lycée MONTAIGNE BORDEAUX) et Alexandre DEVERT , Pierre Damien DESSARPS (TS Lycée SUD MEDOC LETAILLAN MEDOC)

La première partie est l'étude faite par trois élèves de seconde.
La deuxième partie ,qui complète « parfaitement » la première a été rédigée par les élèves de TS.

PARTIE 1

Un nombre parfait est un nombre dont la somme de ses diviseurs propres est égale à ce nombre, ou, sous une autre formulation, un nombre dont la somme de ses diviseurs est égale à deux fois ce nombre.

Pour mieux comprendre, prenons le premier nombre parfait : 6.

Par la première formulation, on peut dire que 6=1+2+3. Et par la deuxième formulation , on a également que 12= 2x6 =1+2+3+6.

Nous avons remarqué,en faisant de nombreux essais que les **nombres parfaits pairs semblaient s'écrire sous la forme 2^n. P, avec P nombre premier,**
et que P est de la forme 2^{n+1}-1, avec n+1 premier.

Les sept premiers nombres parfaits pairs sont :

6 = 2x3 = 1+2+3
avec n=1
$6 = 2^1(2^2-1)$

28 = 4x7 = 1+2+4+7+14
avec n=2
$28=2^2(2^3-1)$

496 = 16x31 = 1+2+4+8+16+31+62+124+248
avec n=4
$496=2^4(2^5-1)$

8 128 = 64 x 127 = 1+2+4+8+16+32+64+127+254+508+1 016+2 032+4 046
avec n=6
$8\ 128 = 2^6\ (2^7-1)$

33 550 336 = 4 096 x 8 191
avec n=12
$33\ 550\ 336 = 2^{12}\ (2^{13}-1)$

8 589 869 056 = 65 536 x 131 071
avec n=16
$8\ 589\ 869\ 056 = 2^{16}\ (2^{17}-1)$

137 438 691 328 = 262 144 x 524 287
avec n=18
$137\ 438\ 690\ 328 = 2^{18}\ (2^{19}-1)$

Maintenant, nous allons démontrer :
1)Si P est premier et 2^nP parfait, alors $P=2^{n+1}-1$
2)Si $2^{n+1}-1$ est premier, alors n+1 est premier.

1)Si P est premier et 2^nP parfait, alors $P=2^{n+1}-1$

Démonstration :

On écrit la somme des diviseurs propres de 2^nP :
$P+2P+2^2P+2^3P+2^4P+....+ 2^{n-1}P+2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+....+2^n$

Or nous savons:
$(X-1)\ (1+X+X^2+X^3+X^4+.....X^n) = (\ X^{n+1}-1)$

Donc après avoir mis P en facteur on obtient:
$P(2^n-1) = P(1+2+2^2+2^3+2^4+2^{n-1})$
$2^{n+1}-1 = 1+2+2^2+2^3+2^4+2^n$

Donc, la somme des diviseurs propres de 2^nP vaut :
$P(2^n-1)+2^{n+1}-1$
Puisque 2^nP est parfait, on a :
$P(2^n-1)+2^{n+1}-1=2^nP$ ce qui nous donne :
$P=2^{n+1}-1$.
Donc : $2^nP = 2^n(2^{n+1}-1)$

2)Si $2^{n+1}-1$ est premier, alors n+1 est premier.

Nous allons ici raisonner par l'absurde.

Si n+1 non premier, cela implique que n+1= ab, avec a>1 et b>1

En utilisant la règle de factorisation $(X^b-1) = (X-1)(X^0+X^1+X^2+...+X^{b-1})$,
nous avons en prenant $X=2^a$: $2^{ab}-1=2^{n+1}-1=(2^a-1)(1+2^a+...+(2^a)^{b-1})$

(2^a-1) est un entier ; $(1+2^a+...+(2^a)^{b-1})$ est un entier.
Donc $(2^a-1)(1+2^a+...+(2^a)^{b-1})$ est un produit de deux entiers
Donc $(2^a-1)(1+2^a+...+(2^a)^{b-1})$ n'est pas premier
Donc $(2^{n+1}-1)$ n'est pas premier

En conclusion :
Si $2^{n+1}-1$ premier, on a n+1 premier.

Mais si n+1 premier, $2^{n+1}-1$ n'est pas forcement premier.

Demonstration :
Nous savons, par démonstration, que si $2^{n+1}-1$ premier, alors n+1 premier.
Nous allons démontrer ici qu'il n'y a pas de réciproque, c'est-à-dire que si n+1 premier, alors $2^{n+1}-1$ n'est pas forcement premier.
Il suffira d'un contre-exemple. En prenant, n+1 = 11, puisque 11 est un nombre premier.

Nous obtenons donc : $2^{n+1}-1 = 2^{11}-1 = 2\ 047 = 23 \times 89$
$2^{11}-1$ n'est donc pas premier, puisque $2^{11}-1$ est le produit de deux facteurs.

En revanche, dans les nombres premiers entre 1 et 50, nous avons n+1 premier qui donne $2^{n+1}-1$ avec les nombres : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 13 ; 17 ; 19 ; 31. Mais nous avons n+1 premier qui ne donne pas $2^{n+1}-1$ premier, avec les nombres : 11 ; 23 ; 29 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47.

Le Cas du nombre 1

Nous nous sommes posé le problème de l'admission du nombre 1 dans la liste des nombres parfaits.

En effets, 1 n'a qu'un seul diviseur, lui-même, 1. La somme des diviseurs de 1 est donc égale à 1.
De plus, 1 peut s'écrire sous la forme du produit $2^n\ (2n+1-1)$, avec n=0. En effet :

$$2^0\ (2^{0+1}-1) = 2^0\ (2^1-1) = 1 \times 1 = 1$$

Mais, dans l'énoncé du problème, nous avons bien dit que dans la somme des diviseurs propres d'un nombre parfaits, il ne pouvait y avoir le nombre lui-même ; c'est-à-dire que, dans le cas présent, nous avons la somme des diviseurs propres de 1 qui est égale à 0 (c'est le seul cas existant) .

PARTIE 2
Les nombres parfaits pairs
Mise en évidence

Avec un ordinateur, on a cherché tout les nombres parfaits de 1 à 10000, puis on a cherché leurs diviseurs :

$$6 \Rightarrow 1, 2, 3, 6$$
$$28 \Rightarrow 1, 2, 4, 7, 14, 28$$
$$496 \Rightarrow 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248, 496$$
$$8128 \Rightarrow 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 127, 254, 508, 1016, 2032, 4064, 8128$$

On a vu que ces nombres ont une structure particulière : une série de puissances consécutive de 2, et une autre série de nombres assez proches des puissances de 2, en même quantité :

$$28 \Rightarrow 1, 2, 4, 7, 14, 28$$
$$28 \Rightarrow 1, 2, 4, 8-1, 16-2, 32-4$$
$$28 = (32-4) \times 1 = (16-2) \times 2 = (8-1) \times 4$$
$$28 = (8-1) \times 4$$

$$496 \Rightarrow 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248, 496$$
$$496 \Rightarrow 1, 2, 4, 8, 16, 32-1, 64-2, 128-4, 256-8, 512-16$$
$$496 = (512-16) \times 1 = (256-8) \times 2 = (128-4) \times 4 = (64-2) \times 8 = (32-1) \times 16$$
$$496 = (32-1) \times 16$$

En regardant les décompositions, on s'aperçoit que ces nombres parfaits sont issus de puissances de 2. Ceci nous a amené à penser que les nombres parfaits pairs sont de la forme suivante :

$$(2^n)(2^{n+1}-1)$$

En utilisant cette formule, on a trouvé un nouveau nombre parfait : 33550336, qui correspond à n = 12. Voici les valeurs de n correspondantes pour chaque nombre parfait trouvé :

$$6 \Rightarrow n = 1$$
$$28 \Rightarrow n = 2$$
$$496 \Rightarrow n = 4$$
$$8128 \Rightarrow n = 6$$
$$33550336 \Rightarrow n = 12$$

La partie 1 a prouvé que si 2^nP est parfait avec P premier, alors $P=2^{n+1}-1$ avec n+1 premier.
On prouve dans cette partie que d'une part $2^n(2^{n+1}-1)$, avec $2^{n+1}-1$ premier, est parfait, d'autre part que tout nombre parfait pair est de la forme précédente.

A) Somme des diviseurs d'un nombre

La fonction SD

Manipuler sans outils les sommes des diviseurs d'un nombre est assez peu pratique. Cette partie se consacre à la mise en place d'un outil assez pratique : la fonction SD, ou somme des diviseurs. Cette fonction retourne la somme des diviseurs d'un nombre entier positif :

6 est divisible par 1,2,3 et 6, donc SD(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12

SD(45) = 1 + 3 + 5 + 9 + 15 + 45 = 78

SD(615) = 1 + 3 + 5 + 15 + 41 + 123 + 205 + 615 = 1008

Nous avons trouvé un algorithme simple pour chercher les diviseurs d'un nombre. Un programme informatique nous épargne les calculs de décompositions manuels, assez fastidieux.

Propriétés de la fonction SD

On a mis en évidence des propriétés (démontrées) de cette fonction :

SD(a) = a + 1 si a est un nombre premier

SD(a) = 2a si a est un nombre parfait

Ce sont des propriétés assez simples. Les suivantes sont plus subtiles et je les admets ici :

$$SD(ab) = SD(a) \times SD(b) \text{ si a et b sont premiers entre eux}$$

$$SD(a^n) = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \text{ si a est un nombre premier, n un entier positif}$$

$$SD(ab) \geq a \times b + a + b + 1 \quad \text{a et b 2 entiers positifs, a > 1, b > 1}$$

B) les nombres de la forme $(2^n)(2^{n+1}-1)$, où $2^{n+1}-1$ premier, sont parfaits.

démonstration :

Soit $P = (2^n)(2^{n+1}-1)$ avec $2^{n+1}-1$ premier.

Alors $SD(P) = SD((2^n)(2^{n+1}-1))$

Or $2^{n+1}-1$ est premier, donc 2^n et $2^{n+1}-1$ sont premiers entre eux :

$$SD(P) = SD((2^n)(2^{n+1}-1)) = SD(2^n) \times SD(2^{n+1}-1)$$

$2^{n+1}-1$ est un nombre premier, d'ou :

$$SD(P) = SD(2^n) \times (2^{n+1})$$

2 est aussi un nombre premier, d'ou :

$$SD(P) = \frac{2^{n+1}-1}{2-1} \times (2^{n+1}) = (2^{n+1}-1) \times (2^{n+1}) = 2(2^{n+1}-1)(2^n) = 2P$$

P est donc un nombre parfait.

C) Tous les nombres parfaits pairs sont de la forme $(2^n)(2^{n+1}-1)$, avec $2^{n+1}-1$ premier

Soit P un nombre parfait pair. Alors $SD(P) = 2P$

P est pair donc $P = a2^n$, a étant un nombre impair, n un entier naturel différent de 0. Donc on a :

$$SD(P) = 2P = 2 \times a2^n = a2^{n+1}$$

$$SD(P) = a2^{n+1} \Leftrightarrow SD(a2^n) = a2^{n+1}$$

Comme le nombre a est impair, alors il est premier avec 2 et 2^n, d'où :

$$SD(a2^n) = a2^{n+1} \Leftrightarrow SD(a) \times SD(2^n) = a2^{n+1}$$

2 est un nombre premier, donc :

$$SD(a) \times SD(2^n) = a2^{n+1} \Leftrightarrow SD(a) \times \frac{2^{n+1}-1}{2-1} = a2^{n+1} \Leftrightarrow SD(a) \times (2^{n+1}-1) = a2^{n+1}$$

a et $2^{n+1}-1$ sont impairs, 2^{n+1} est pair, donc SD(a) est pair.
On pose $SD(a)=b2^m$, avec b impair.
Alors $b2^m(2^{n+1}-1)=a2^{n+1}$. a et b étant impairs, on a nécessairement m=n+1.

On a donc : $SD(a) = b2^{n+1}$, b étant un nombre impair.
Plusieurs cas se présentent :

- a premier, donc b = 1, on a fini la démonstration.
- a n'est pas premier, et b = 1.
- a n'est pas premier, et b > 1.

La deuxième proposition n'est pas valable car si b = 1 alors on obtient :
$SD(a) = 2^{n+1}$ et $a = 2^{n+1}-1$ donc $SD(a) = a+1$, donc a premier.
Or c'est contradictoire avec la proposition de départ.

Supposons que a ne soit pas un nombre premier, b > 1. On a $a = b \times (2^{n+1}-1)$ et $SD(a) = b \times 2^{n+1}$

$$SD(a) \geq b \times (2^{n+1}-1) + b + (2^{n+1}-1) + 1$$

$$b2^{n+1} \geq b \times (2^{n+1}-1) + b + (2^{n+1}-1) + 1$$

$$b2^{n+1} \geq b \times 2^{n+1} - b + b + 2^{n+1}$$
$$b \geq b+1$$
$$0 \geq 1$$

On aboutit à une absurdité. Donc a est premier, et donc b = 1 car $a = b \times (2^{n+1} - 1)$. Les nombres parfaits pairs sont tous de la forme $(2^n)(2^{n+1} - 1)$, avec $2^{n+1} - 1$ premier.

D)Quelques propriétés des nombres parfaits pairs

En base 2, les nombres parfaits pairs ont une structure intéressante. En base 10, on écrit les nombres avec des chiffres de 0 à 9. En base 2, on les écrit avec les chiffres 0 et 1.

$$6 \Rightarrow 110$$
$$28 \Rightarrow 11100$$
$$496 \Rightarrow 111110000$$

Les nombres parfaits pairs sont de la forme $(2^n)(2^{n+1} - 1)$. Or 2^n, en binaire, s'écrit avec un 1 suivit de n chiffres 0. Et donc $2^{n+1} - 1$, en binaire, s'écrit seulement avec n + 1 chiffres 1. Donc un nombres parfait pair s'écrit en binaire avec n + 1 chiffres 1 suivit de n chiffres 0. De plus, comme n + 1 est premier et donc impair, la somme des chiffres composant un nombre parfait pair est toujours égale à 1. (Sauf 6 en base 10, car 6 < 10).

$$28 \Rightarrow 2 + 8 = 10 \Rightarrow 1 + 0 = 1$$
$$496 \Rightarrow 4 + 9 + 6 = 19 \Rightarrow 1 + 9 = 10 \Rightarrow 1 + 0 = 1$$
$$8128 \Rightarrow 8 + 1 + 2 + 8 = 19 \Rightarrow 1 + 9 = 10 \Rightarrow 1 + 0 = 1$$
$$33550336 \Rightarrow 3 + 3 + 5 + 5 + 0 + 3 + 3 + 6 = 28 \Rightarrow 2 + 8 = 10 \Rightarrow 1 + 0 = 1$$

Enfin, les nombres parfaits pairs semblent tous se terminer par 6 ou 28, je ne sais pas vraiment pourquoi. Je pense que ces nombres ont d'autres propriétés, à vous de voir ! Mon objectif primaire est de traquer les nombres parfaits, pas de les dépecer…

E) Les nombres parfaits impairs : pistes de recherches

Bon, après avoir réglé le sort des nombres parfaits pairs, il nous reste les nombres parfaits impairs. Nous avons 3 pistes principales :

- Déduire des propriétés sur les nombres parfaits impairs jusqu'à que l'on trouve une contradiction : on prouverait ainsi leur non-existence.
- En utilisant la fonction SD et le fait que tout nombre soit le produit de nombres premiers, montrer que 2 est incontournable pour un nombre parfait, et donc que les nombres parfaits impairs n'existent pas.
- En étudiant les diviseurs des nombres, trouver des cycles, des lois, pour coincer les nombre parfaits.