Exercice I

1. (a) Par $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - 1$ et $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1$.

   (b) Par variation pour la première et par intégration de la première entre 0 et θ pour la deuxième.

2. (a) Par continuité de f en 0 ($1 - f(x) \leq ax^2$) $\lim_{n\to\infty} \cos(\theta_n) = 1$, donc θ_n est dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ pour n assez grand.

   Pour de tels n $\theta_n \leq \frac{\left[1 - f(\frac{x}{2^n})\right]\pi}{2}$ et donc $\lim_{n\to\infty} \theta_n = 0$.
   D'après la relation satisfaite par f, on obtient : $\cos(\theta_n) = \cos(2\theta_{n+1})$.
   Donc si on choisit un rang N à partir duquel θ_n est dans $[0, \frac{\pi}{2}]$ on obtient : $\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$.

   (b) On aura donc : $\theta_n = \frac{\theta_N}{2^{n-N}}$ et $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \cos\left(\frac{\theta_N}{2^{n-N}}\right)$.
   Mais, $\lim_{x\to 0} \frac{1 - f(x)}{x^2} = a$ et $\lim_{\theta\to 0} \frac{1 - \cos(\theta)}{\theta^2} = \frac{1}{2}$,
   donc $\lim_{n\to\infty} \left[\frac{\theta_N}{2^{n-N}\frac{x}{2^n}}\right]^2 = 2a$, $a \geqslant 0$ et, au signe près, $\theta_N = \frac{x}{2^N}\cdot\sqrt{2a}$.
   On obtient : $f\left(\frac{x}{2^N}\right) = \cos\theta_N = \cos\left(\frac{x\sqrt{2a}}{2^N}\right)$, puis par récurrence sur $k \leq N$,
   $f\left(\frac{x}{2^{N-k}}\right) = \cos\left(\frac{x\sqrt{2a}}{2^{N-k}}\right)$ ce qui donne le résultat pour $k = N$.

Exercice II

1. La probabilité que je ne marque rien est $\frac{20\times 19\times 18\times 17}{20^4} = \frac{116280}{160000} = \frac{2907}{4000} \simeq 0,72675$.

2. Loi binomiale : $P(N_a = 0) = \frac{19^4}{20^4} = \frac{130321}{160000}$, $P(N_a = 1) = 4\times\frac{19^3}{20^4} = \frac{27436}{160000}$, $P(N_a = 2) = 6\times\frac{19^2}{20^4} = \frac{2166}{160000}$, $P(N_a = 3) = 4\frac{19}{20^4} = \frac{76}{160000}$, $P(N_a = 4) = \frac{1}{20^4}$.

3. X_a est une variable de Bernoulli de paramètre $P(N_a \geqslant 2) = \frac{2243}{160000} = p$. Soit G le gain, on a $G = \sum_{a=1}^{20} aX_a$, donc
$$E(G) = p\frac{20\times 21}{2} = \frac{471030}{160000} \simeq 2,94$$

4. Quatre possibilités de gain : $P(88xy) = \frac{19\times 18\times 6}{20^4} = \frac{2052}{20^4}$, $P(888x) = P(N_8 = 3) = \frac{76}{20^4}$, $P(8888) = \frac{1}{20^4}$, et les trois $P(xxyy) = \frac{6}{20^4}$ avec $x > y$ et $x + y = 8$ (trois couples possibles). Total :
$$\frac{2052 + 76 + 1 + 3\times 6}{20^4} = \frac{2147}{160000} \simeq 1,34\%$$

5. Si je relance tout, l'espérance de gain est celle de G précédemment calculée.

   Si je garde les deux 2, la probabilité du motif $22xx$, à $x \neq 2$ fixé, est $\dfrac{1}{20^2}$, et dans ce cas je gagne $2+x$, dans le cas contraire je gagne 2. Ainsi l'espérance de gain est
$$E(G') = \sum_{x\neq 2} \frac{2+x}{20^2} + \left(1 - \frac{19}{20^2}\right) \times 2 = \frac{1008}{400} = 2,52$$
   Si je garde le 11, soit M_a le nombre de a dans les quatre lancers. Si $a \neq 11$, la loi de M_a est $P(M_a = 0) = \dfrac{19^3}{20^3}$, $P(M_a = 1) = \dfrac{3\times 19^2}{20^3}$, $P(M_a = 2) = \dfrac{3\times 19}{20^3}$, et $P(M_a = 3) = \dfrac{1}{20^3}$.
   En particulier, $P(M_a \geqslant 2) = \dfrac{58}{2000}$. Pour M_{11}, on décale tout de 1 et on a $P(M_{11} \geqslant 2) = \dfrac{1141}{8000}$.
   L'espérance de gain est alors
$$\begin{aligned} E(G'') &= \sum_{a\neq 11} a \times P(M_a \geqslant 2) + 11 \times P(M_{11} \geqslant 2) \\ &= \frac{199 \times 58 + 11 \times 1141}{8000} = \frac{24093}{8000} \simeq 3,01 \end{aligned}$$
   Conclusion : il est préférable de garder le 11, mais de peu. Il n'est pas intéressant de garder les 2...
6. Si je relance tout, l'espérance de gain est $g_0 = \dfrac{471030}{160000}$.
   Si je garde a_1, l'espérance de gain est (cf les calculs précédents) :
$$g_1(a_1) = \frac{(210 - a_1) \times 58 + 1141 \times a_1}{8000} = \frac{12180 + 1083a_1}{8000}$$
   Si je garde $a_1 > a_2$, l'espérance est
$$\begin{aligned} g_2(a_1, a_2) &= \frac{1}{400} \times (210 - a_1 - a_2) && (\text{motif } a_1a_2xx) \\ &= \frac{38}{400} \times (a_1 + a_2) && (\text{motif } a_1a_2a_kx) \\ &= \frac{2}{400} \times (a_1 + a_2) && (\text{motif } a_1a_2a_1a_2) \end{aligned}$$
   et ainsi $g_2(a_1, a_2) = \dfrac{210 + 39(a_1 + a_2)}{400}$.
   Si je garde $a_1 > a_2 > a_3$, l'espérance est $g_3(a_1, a_2, a_3) = \dfrac{a_1 + a_2 + a_3}{20}$.
   Enfin, si je garde tout, je ne gagne rien.
   On résout les inégalités :
$$g_1 \geqslant g_0 \Longleftrightarrow a_1 \geqslant 10,5$$
$$g_2 \geqslant g_0 \Longleftrightarrow a_1 + a_2 \geqslant \frac{387030}{15600} \simeq 24,8$$
$$g_3 \geqslant g_0 \Longleftrightarrow a_1 + a_2 + a_3 \geqslant \frac{471030}{8000} \simeq 58,88 \quad \text{impossible !}$$
   Enfin $g_2 \geqslant g_1 \iff 780a_2 \geqslant 7980 + 303a_1$, mais comme $a_2 \leqslant a_1 - 1$, l'inégalité $g_2 \geqslant g_1$ implique que $780(a_1 - 1) \geqslant 7980 + 303a_1$ et donc que $a_1 \geqslant 18,36$.

   Pour résumer, la démarche est la suivante : si $a_2 \geqslant 18$, garder a_1 et a_2. Sinon, si $a_1 \geqslant 11$, garder uniquement a_1. Sinon tout rejouer.

Exercice III

1. (a) a et b étant premiers entre eux, il en est de même pour a et $a+b$; il s'en suit que ka n'est divisible par $a+b$ que si $a+b$ divise k, et par conséquent les entiers r_k, $1 \leqslant k \leqslant a+b-1$, sont bien éléments de $[\![1, a+b-1]\!]$.

   Il suffit donc de montrer que ces entiers sont distincts. Or $r_k = r_l$ si, et seulement si, $a+b$ divise $a(k-l)$, c'est à dire $a+b$ divise $(k-l)$, soit $k=l$ puisque $|k-l| < a+b$.

   (b) La différence $r_{k+1} - r_k$ vaut a ou $-b$ selon que r_k est inférieur ou supérieur à b.

   Donc $U(r_k) = U(r_{k+1})$ et d'après ce qui précède et une récurrence finie, U est constante égale à $U(a)$ sur $[\![1, a+b-1]\!]$.

   Supposons $U(j)$ définie pour un $j \geqslant a+b$. Il existe q entier tel que $j = aq+r$ avec $1 \leqslant r \leqslant a$ donc $r \in [\![1, a+b-1]\!]$. Alors $U(j) = U(r) = U(a)$.

2. Posons $a = da'$, $b = db'$ et soit i dans $[\![1, d]\!]$.

   La suite qui à k associe $u_{i+(k-1)d}$ est définie pour $i + (k-1)d \leqslant a+b-d$ donc en particulier pour k dans $[\![1, a'+b'-1]\!]$. Elle admet a' et b', qui sont premiers entre eux, pour période, donc, d'après la question précédente, elle est constante. C'est le résultat annoncé.

3. (a) Puisque b est au moins égal à 2, on a $r_1 = a < a+b-1$. L'entier m tel que $r_m = a+b-1$ est donc au moins égal à 2.

   Par ailleurs $r_{a+b-1} = b < a+b-1$, donc m est au plus égal à $a+b-2$.

   Prenons $A = \{r_1 = a, r_2, \dots, r_{m-1} = b-1\}$ et $B = \{r_{m+1} = a-1, r_{m+2}, \dots, r_{a+b-1} = b\}$. A et B sont non vides et la suite V n'est pas constante.

   Montrons que V est de période a. Soit i un entier au plus égal à $a+b-2-a = b-2$. On a donc $i = r_k$ avec $k \neq m-1$ et $k \neq a+b-1$ donc si i est dans A (respectivement B), il en est de même pour $i + a = r_{k+1}$.

   Montrons que V est de période b. Soit i un entier au plus égal à $a+b-2-b = a-2$. On a donc, pour un certain k, $i = r_k$, reste de la division de $r_{k-1} + a$ par $a+b$. On constate pareillement que si i est dans A (respectivement B), il en est de même pour $i + b = r_{k-1}$.

   (b) La décomposition est unique à l'échange près de A et B car les propriétés de périodicité font que si par exemple $a = r_1 \in A$, alors r_2,..., r_{m-1} sont dans A.

   La suite $k \mapsto V(a+b-1-k)$ possède les mêmes propriétés que V. Par unicité elle est égale à V : V est un *palindrome*.