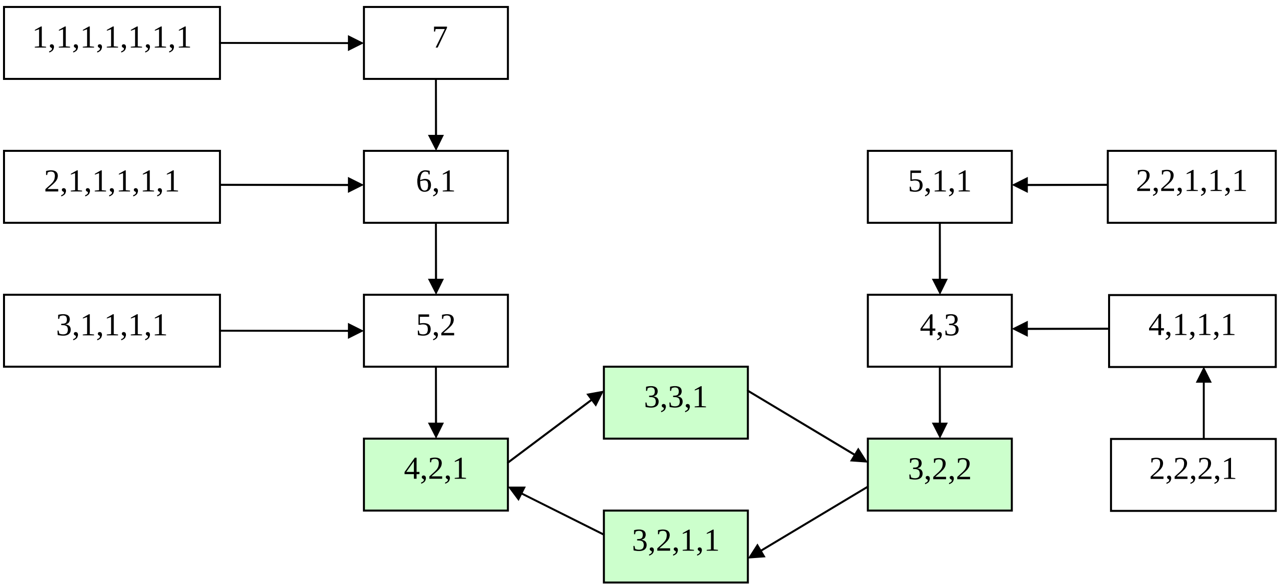
Exercice 1 :

Le graphe ci-dessous donne l'évolution des répartitions à partir d'une répartition quelconque :



<u>Question 1</u>
En partant de la répartition (7), en trois manipulations on obtient la répartition (4,2,1).
Puis quatre manipulations redonnent à nouveau (4,2,1) et ainsi de suite.
Comme 2007 = 501 x 4 + 3 , après 2007 manipulations, on aura encore la répartition $\boxed{(4,2,1)}$.

<u>Questions 2 et 3</u>
On raisonne de même qu'en question 1, mais en sens contraire et en tenant compte du fait qu'au bout de quelques manipulations on rentre dans le cycle des quatre répartitions en vert sur le graphique, et que par ailleurs 2007 manipulations reviennent en général à 3 manipulations. Pour chacune des quatre répartitions du cycle (en vert), on peut déterminer quelles répartitions initiales permettent d'y aboutir en 2007 (c'est-à-dire en 3) manipulations. Il suffit donc de remonter de trois flèches. On obtient donc le résultat suivant :

Les répartitions initiales suivantes…	aboutissent en 2007 manipulations à
(7) (2,1,1,1,1,1) (3,3,1) (4,3)	(4,2,1)
(6,1) (3,1,1,1,1) (3,2,2)	(3,3,1)
(5,2) (3,2,1,1) (2,2,1,1,1) (2,2,2,1)	(3,2,2)
(4,2,1) (5,1,1) (4,1,1,1) ((1,1,1,1,1,1,1)	(3,2,1,1)

Ainsi pour la question 2 :

Les répartitions initiales suivantes…	aboutissent en 2007 manipulations à
(7) (2,1,1,1,1,1) (3,3,1) (4,3)	(4,2,1)

Et pour la question 3, seule la répartition finale $\boxed{(3,3,1)}$ pouvait faire hésiter Virginie entre trois répartitions initiales.

Exercice 2 :

1) De l'égalité $m^2-p^2=8$, on déduit (*) : $m^2=p^2+8$ donc : $p<m<p+3$, et $m=p+1$ ou $m=p+2$.
Avec $m=p+1$, (*) est impossible. Avec $m=p+2$, il vient $p=1$ et $m=3$.

2) une étude simple de la figure (à partir de triangles rectangles isocèles par exemple) permet d'établir que :
DC= AB-AD ; MN=AB-2
L'égalité des aires conduit alors à : $(AB-4)^2-(AD-AB)^2=8$.
On obtient avec 1) : AB=7, AD=6, DC=1.

On peut aussi travailler à partir d'un pavage du « grand » triangle obtenu en prolongeant (AD) et (BC).

Exercice 3 :

Pour la première question, supposons que P(N) est le produit de k entiers supérieurs à 1 alors le produit obtenu en ajoutant 1 à l'un de ces k entiers est strictement supérieur à P(N).
La deuxième question doit permettre d'aboutir à la conclusion suivante : si N= 3k, alors $P(N) = 3^k$; si N=3k+1, alors $P(N) = 4\times 3^{k-1}$ et si N = 3k + 2, alors $P(N) = 3^k \times 2$. Pour la dernière question, on trouve N = 21.

Exercice 4 :

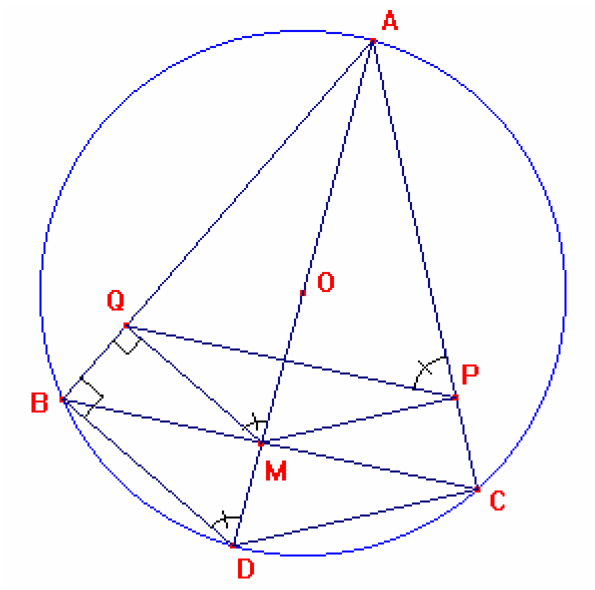
Pour la première question, si on note D le point diamétralement opposé à A, on montre que (BD) est parallèle à (MQ), (DC) est parallèle à (MP) et donc (QP) parallèle à (BC).
Ou bien : Soit D le point diamétralement opposé à A par rapport au cercle circonscrit au triangle ABC, on a :

$\widehat{APQ} = \widehat{AMQ}$ (les points A, P, M et Q sont cocycliques)

$\widehat{AMQ} = \widehat{ADB}$ (les droites (QM) et (BD) sont parallèles)

$\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$ (les points A, B, D et C sont cocycliques), donc :

$\widehat{APQ} = \widehat{ACB}$, ce qui prouve que les droites (PQ) et (BC) sont parallèles.



Le résultat obtenu au début de la deuxième question permet de remarquer que la somme des diagonales est minimale lorsque AM est minimale donc lorsque M est le pied de la hauteur issue de A dans ABC.
Pour la troisième question l'aire de AQMP est maximale lorsque la somme des aires de CMP et MQB est minimale.

Posons $BM = x,$ on a $BQ = x\cos\widehat{B}$ et $QM = x\sin\widehat{B},$ donc :

$Aire\left(BQM\right) = \dfrac{x^2\sin\widehat{B}\cos\widehat{B}}{2} = \dfrac{x^2}{4}\sin 2\widehat{B},$ et de façon similaire, on a aussi :

$Aire\left(PCM\right) = \dfrac{\left(a-x\right)^2\sin\widehat{C}\cos\widehat{C}}{2} = \dfrac{(a-x)^2}{4}\sin 2\widehat{C}.$

Ayant posé $BC = a,$ notre problème revient à minimiser la somme

$f\left(x\right) = \dfrac{x^2}{4}\sin 2\widehat{B} + \dfrac{(a-x)^2}{4}\sin 2\widehat{C}$ où f est une fonction définie sur l'intervalle $\left]0, a\right[$.

Un calcul de dérivée nous donne : $f'\left(x\right) = 2\left(\sin 2\widehat{B} + \sin 2\widehat{C}\right)x - 2a\sin 2\widehat{C},$ et on vérifie bien que pour $x_0 = \dfrac{a\sin 2\widehat{C}}{\sin 2\widehat{B} + \sin 2\widehat{C}} \in \left]0, a\right[$ la fonction admet un minimum absolu sur l'intervalle $\left]0, a\right[$. On peut aussi obtenir le résultat en cherchant le minimum d'un trinôme.