

OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

Session de 2007
CLASSE DE PREMIÈRE
Durée : 4 heures

*Les quatre exercices sont indépendants.
Les calculatrices sont autorisées.*

Exercice 1 : Un problème de tas

On dispose de 7 objets que l'on répartit en autant de tas que l'on veut, chaque tas contenant autant d'objets que l'on veut.

Une manipulation consiste à enlever un objet de chaque tas et à faire un nouveau tas des objets ainsi récupérés.

Exemple : une répartition possible au départ sera notée (4,3) ;
elle signifie qu'on a deux tas, l'un de 4 objets et l'autre de 3 objets ;
après une manipulation, on obtiendra donc la répartition (3,2,2).

Avertissement : on considère que les répartitions (4,3) et (3,4) sont identiques.
De même les répartitions (3,2,2), (2,3,2) et (2,2,3) sont identiques.

1. On place les 7 objets en un seul tas ; la répartition est donc (7).
Quelle répartition obtiendra-t-on après 3 manipulations ? Après 7 manipulations ? Après 11 manipulations ? Après 2007 manipulations ?
2. Ici, on ne connaît pas la répartition initiale, mais après 2007 manipulations, on obtient la répartition (4,2,1).
Indiquer toutes les répartitions initiales possibles.
3. Paul et Virginie jouent ensemble.
Au départ, Paul dispose les objets sans montrer la répartition à Virginie. Puis il simule sur son ordinateur 2007 manipulations et ne montre à Virginie que la répartition finale. Il demande alors à Virginie de deviner la répartition initiale.
Virginie réfléchit et avoue ne pas savoir répondre car elle hésite entre trois répartitions.
Sachant que Virginie a raisonné correctement, quelle répartition finale a-t-elle vue ?

Exercice 2 : Des trapèzes de même aire

Le but de cet exercice est de déterminer les trapèzes rectangles qui, sous certaines conditions de distances et d'angles, sont partagés en deux trapèzes de même aire par une parallèle donnée à leurs bases.

1. Question préliminaire :
Existe-t-il un couple d'entiers naturels (m, p) tel que : $m^2 - p^2 = 8$?
En existe-t-il plusieurs ?
(Le résultat de cette question peut être exploité dans la suite de l'exercice, selon la méthode utilisée pour la traiter).

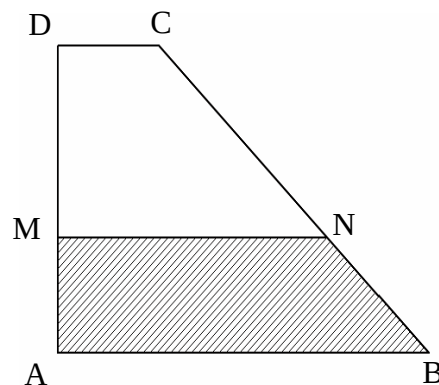
2. On considère les trapèzes rectangles ABCD de bases $[AB]$ et $[CD]$ tels que :

- $\widehat{ABC} = 45^\circ$.
- les distances AB, AD et CD sont des nombres entiers, et $AD > 2$.

Soit M le point du segment $[AD]$ tel que $AM = 2$.

Déterminer les distances AB, AD et CD de sorte que les aires des trapèzes MNBA et MNCD soient égales.

Indication : On pourra faire apparaître sur la figure des triangles isocèles.



Exercice 3 : Le plus grand produit

N est un entier naturel non nul. Il se décompose de plusieurs façons comme somme d'entiers naturels. Pour chacune de ces décompositions, on effectue le produit des entiers non nuls et on note $P(N)$ le plus grand produit réalisé parmi toutes les décompositions de N.

Par exemple, pour $N = 4$:

Décomposition	Produit
$1 + 1 + 1 + 1$	1
$1 + 1 + 2$	2
$2 + 2$	4
$1 + 3$	3
$0 + 4$	4

Ainsi $P(4) = 4$.

1. Montrer que quel que soit l'entier N, on a $P(N+1) > P(N)$.
2. Déterminer $P(16)$, $P(17)$, $P(18)$ en expliquant la démarche.
3. À partir de quelle valeur de N, l'entier $P(N)$ dépasse-t-il 2007 ?

Exercice 4 : Dans un triangle

Soit un triangle ABC dont tous les angles sont aigus. M est un point du segment $[BC]$, P et Q désignent les projetés orthogonaux respectifs de M sur les droites (AC) et (AB).

1. Montrer que si le point M est sur le diamètre issu de A du cercle circonscrit au triangle ABC, alors la droite (PQ) est parallèle à (BC).
2. a) Montrer que les points A, Q, M et P sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
b) Montrer que $PQ = AM \times \sin \widehat{BAC}$.
c) En déduire toutes les positions du point M pour lesquelles la somme des diagonales du quadrilatère AQMP est minimale.
3. Déterminer toutes les positions du point M pour lesquelles l'aire du quadrilatère AQMP est maximale.