Correction

<u>Exercice 1</u> : Un partage équitable

1. Les deux triangles rectangles ont la même aire : $\frac{1\times x}{2}$. Chacune des trois parties ayant la même aire $\frac{1}{3}$, il s'agit de résoudre l'équation $\frac{1\times x}{2}=\frac{1}{3}$, soit $x=\frac{2}{3}$.
2. On veut que l'aire du triangle rectangle soit égale au tiers de l'aire du carré privé du triangle rectangle de côté $(1-x)$. On obtient l'équation : $\frac{x}{2}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{(1-x)^2}{2}\right)$ équivalente à $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Pour cette valeur de *x*, les trois parties restantes ont la même aire.
3. Dans le repère orthonormal $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$ adapté à la figure, on écrit les équations des trois droites : $(AC): y=x$; $(HJ): x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $(DI): y=1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}x$.

Soit P le point d'intersection des droites (AC) et (HJ), ses coordonnées vérifient :

$x_P=y_P=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. D'où :

$$1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}x_P=1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\times\frac{\sqrt{5}-1}{2}=1-\frac{6-2\sqrt{5}}{4}=\frac{2\sqrt{5}-2}{4}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=y_P.$$

Les coordonnées de P vérifient donc l'équation de la droite (DI).

Il s'ensuit que les trois droites sont concourantes.

<u>Exercice 2</u> : Les bons nombres (*corrigé ac-caen*)

1. Parmi les nombres de 1 à 10, seuls 1, 4, 9 et 10 sont « bons » :

$1=1$ et $\frac{1}{1}=1$ $\quad 4=2+2$ et $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ $\quad 9=3+3+3$ et $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$ $\quad 10=4+4+2$ et $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=1$

Pour les autres nombres, on examine toutes les décompositions possibles (en évitant celles comportant un 1 ou deux 2, qui n'aboutiront pas) pour se rendre compte qu'ils sont « mauvais ».

2. Si n est le carré d'un entier naturel, on peut écrire $n = k^2 = k \times k = k + k + \ldots k$.

Alors $\frac{1}{k}+\frac{1}{k}+\ldots+\frac{1}{k} = k \times \frac{1}{k} = 1$, ce qui montre que n est « bon ».

3. Si n est « bon », il peut s'écrire comme somme de nombres dont la somme des inverses vaut 1 : $n = \sum_{i=1}^{k} a_i$ avec $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} = 1$

Alors on peut écrire 2n+2 comme somme de 2 et du double de chacun des nombres intervenant dans la décomposition de n :

$$2n+2 = 2 + 2\sum_{i=1}^{k} a_i = 2 + \sum_{i=1}^{k} 2a_i$$

et $\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2a_i} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{a_i} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$ donc 2n+2 est « bon »

On peut écrire 2n + 9 comme somme de 3, de 6 et du double de chacun des nombres intervenant dans la décomposition de n :

$$2n+9 = 3 + 6 + 2\sum_{i=1}^{k} a_i = 3 + 6 + \sum_{i=1}^{k} 2a_i$$

et $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2a_i} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{a_i} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$ donc 2n+9 est « bon »

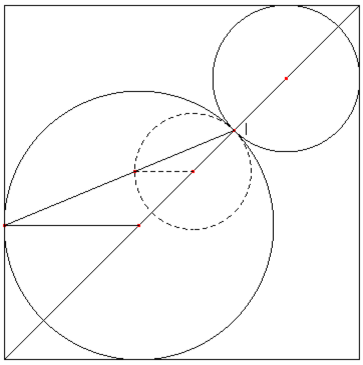
4. Si $24 \leq n \leq 56$ alors 2n+2 est un nombre pair compris entre 50 et 114, qui est « bon » d'après la question précédente.

Si $24 \leq n \leq 56$ alors 2n+9 est un nombre impair compris entre 57 et 121, qui est « bon » d'après la question précédente.

En admettant que tous les nombres compris entre 24 et 56 sont « bons », on vient de justifier que les nombres compris entre 57 et 115 sont tous « bons ». On peut alors reprendre le raisonnement précédent, avec une liste de « bons nombres » compris entre 24 et 115… A chaque étape, on obtient une nouvelle liste « sans trou » de bons nombres, pairs ou impairs, dont le plus grand élément est au moins deux fois supérieur à celui de la liste précédente : tous les nombres entiers supérieurs à 56 sont « bons ».

Exercice 3 : Des jetons circulaires dans une boîte carrée

1.a. Les centres des cercles se trouvent sur la diagonale [BD]. Pour construire Γ_2, on peut utiliser une homothétie de centre I qui transforme le cercle pointillé en le cercle voulu.

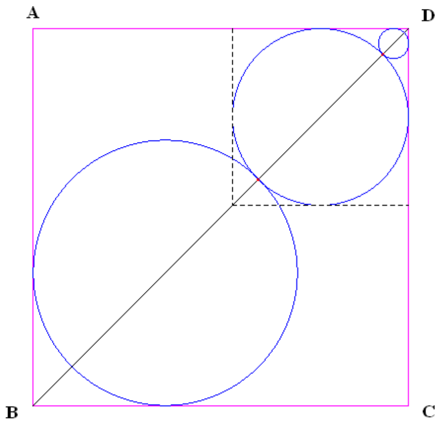


b. Le cercle Γ_2 n'est pas, dans ce cas, à l'intérieur du carré.

2. a. En utilisant Thalès ou une méthode analytique ou que BD= $R_1\sqrt{2}+R_1+R_2+R_2\sqrt{2}$ on trouve $R_1+R_2=a(2-\sqrt{2})$.

b. La valeur maximale de R_1 est $\frac{a}{2}$, la valeur minimale est donc $a(2-\sqrt{2})-\frac{a}{2}=a\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$.

3. $S=\pi(R_1{}^2+R_2{}^2)=\frac{\pi}{2}[(R_1+R_2)^2+(R_1-R_2)^2]$. Comme R_1+R_2 est constant, S est minimale quand $R_1=R_2=a\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ et maximale quand $R_1=\frac{a}{2}$ et $R_2=a\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$.



4. Dans le carré en pointillés, en appliquant 2.a., on a $R_3=2R_1(2-\sqrt{2})$.

Exercice 4 : Les différences de deux carrés

1. $2008=253^2-249^2=503^2-501^2$.
2. $2p+1=(p+1)^2-p^2$.
3. $n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2$ obtenu en posant $x-y=n$ et $x+y=n^2$.
4. x+y et x-y étant de même parité (somme paire), les seuls entiers qui ne peuvent s'écrire (x+y)(x-y) sont ceux qui ont exactement un 2 dans leur décomposition, c'est-à-dire les entiers de la forme 2(2p+1).
5. Par exemple $405=5\times3^4$ qui a dix diviseurs tous impairs ou encore $192=2^6\times3$ qui parmi ses quatorze diviseurs en a deux impairs et donc exactement cinq paires utilisables.