Section S

Problème 1

Soient a, b, c trois entiers naturels distincts et supérieurs ou égaux à 2. On forme les huit combinaisons possibles de ces trois nombres utilisant des parenthèses, des additions et des multiplications.

L'objectif est de trouver des familles de nombres a, b, c pour lesquels deux combinaisons donnent le même résultat.

A- Une première famille

1. Ecrire ces combinaisons lorsque :

   a=2 b=3 c=4

   a=4 b=7 c=8

   a=6 b=7 c=8

   a=6 b=11 c=12

   Sur ces exemples, quelles sont les combinaisons qui donnent le même résultat ?
2. En déduire une première famille d'entiers qui répondent au problème. Le prouver.

B- D'autres familles…

On se propose de trouver d'autres familles telles que (b+c)a=bc+a

1. Déterminer c lorsque a=p et b=p+1, p étant un entier naturel supérieur ou égal à 2
2. Déterminer b lorsque a=2p et c=6p-2, p étant un entier naturel supérieur ou égal à 1
3. En déduire deux autres familles solutions du problème initial

C- Une propriété générale

On se propose de chercher tous les entiers naturels $a,\ b,\ c$ vérifiant :

$$(S):\begin{cases} b<c, \\ a(b+c)=bc+a, \\ \dfrac{c}{a}\ \text{est minimum.} \end{cases}$$

1. Prouver que $a<b$.

2. Démontrer que $\dfrac{c}{a}\geq 2$. (on pourra montrer que $\dfrac{c}{a}=1+\dfrac{c-1}{b}$.)

3. En déduire toutes les solutions de (S).

1.

Solution

A 1. *Dans les exemples 1, 2 et 4 on trouve que a(b+c)=a+bc. Pas de résultats identiques dans le 3*

2. Ces 3 possibilités correspondent à des triplets de la forme (a, 2a-1, 2a). On vérifie que ces triplets sont solutions

B.1*. c=p²*

2. b=3p

3. (p, p+1,p²) et (2p,3p,6p-2)

C. $a = \dfrac{bc}{b+c-1}$; or $c < b + c - 1$, donc $a < b$

b. $\dfrac{c}{a} = \dfrac{b+c-1}{b} = 1 + \dfrac{c-1}{b}$; or $c - 1 \geq b$, donc $\dfrac{c}{a} \geq 2$

c. $\dfrac{c}{a}$ *est donc minimum quand il est égal à 2. Si* $\dfrac{c}{a}$ *=2 alors c=2a, donc a+2ab=a(b+2a), donc a(2a-b-1)=0, donc b=2a-1. On a bien b<c. Les seules solutions de (S) sont donc les triplets (a, 2a-1, 2a) a entier supérieur ou égal à 2.*

Problème 2

1. On considère un ensemble E du plan contenant au moins trois points et tel que les distances entre deux quelconques de ses points soient égales.
   a. Donner un exemple d'ensemble E formé de trois points.
   b. Est-ce que E peut contenir plus de trois points ? Justifier.
2. Dans cette question E est un ensemble de points de l'espace possédant la même propriété qu'à la question 1.
   Quel est le nombre maximum de points de E ?
3. Soit n un entier naturel quelconque au moins égal à 3 et C un cercle donné.
   Montrer qu'il est possible de construire sur ce cercle n points tels que les distances entre deux quelconques de ces points soient toutes différentes.

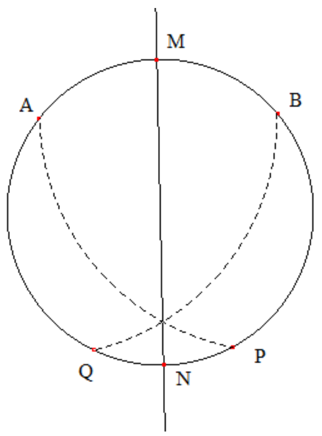
Solution

1. a. Un triangle équilatéral fait l'affaire.

b Soit A, B C et D quatre points de E. ABC et ABD sont équilatéraux. C et D étant distincts ils sont symétriques par rapport à (AB). On a alors CD=AB $\sqrt{3}$ $\neq$ AB. Il est donc impossible que E contienne quatre points ni davantage par conséquent.

2.E peut contenir 4 points (tétraèdre régulier) mais pas davantage comme le montrerait un raisonnement semblable au 1b.

3. On peut construire facilement 3 points sur le cercle vérifiant la propriété. Il suffit que le triangle formé par ces 3 points ne soit pas isocèle. Donc si A et B sont donnés, C ne doit pas occupé la position des points M, N, P ou Q, obtenus en traçant la médiatrice du segment [AB], le cercle de centre A passant par B et le cercle de centre B passant par A.



Si l’on souhaite placer un quatrième point il faudra éviter M, N, P et Q mais aussi les quatre points construits à partir de [AC] et les quatre autres construits à partir de [BC]. On met donc en place un algorithme de construction : si n points sont déjà placés sur le cercle formant entre eux un nombre fini N de segments (N=$\frac{n(n-1)}{2}$), le nombre de points à éliminer pour placer un point supplémentaire est au maximum de 4N (il est possible qu’il y ait des superpositions). Le cercle ayant une infinité de points, cela est toujours possible.

Pour les non S

Problème 1

En partant du nombre 1, on peut arriver à 2010 en n’utilisant que deux opérations : ajouter 1 et multiplier par 7. On peut par exemple ajouter 2010 fois le 1.
Donner une solution avec un nombre d’étapes le plus petit possible.

Solution

$((1+1+1+1+1)\times 7+1+1+1+1+1+1)\times 7\times 7+1$, ce qui fait 14 étapes

Problème 2

				1				
			2	3	4			
		5	6	7	8	9		
	10	11	12	13	14	15	16	
17	18	...						

Une ligne est désignée par le nombre écrit dans sa première case à gauche.
Une colonne est désignée par le nombre écrit dans sa case la plus haute.
Un nombre est repéré par la ligne et la colonne dans lesquels il se trouve.
Par exemple le nombre 11 est repéré par (10,5), le nombre 8 par (5,4).

1. Comment est repéré le nombre 30 ?

2. Comment est repéré le nombre 2010 ?

Solution

1. (26, 2) pour 30 2. (1937, 900) En effet 2010 est entre 1936 et 2025. C'est le 74ème nombre de la ligne qui en contient 89. C'est le 29ème après le 44ème qui est au dessous du 1. Il est donc au dessous du 30ème carré donc de 900.

Problème 3

On considère la suite bâtie de la manière suivante :

$l_0 = (1); l_1 = (1, \frac{1}{2}); l_2 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}); l_3 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8})$, …, chaque nouvelle séquence étant obtenue en recopiant la précédente et en y rajoutant les mêmes termes divisés par 2.

1. Quelle est la plus petite valeur n pour laquelle l_n contient plus de 2010 éléments ?
2. Pour cette valeur de n quel est le 2010ème élément de l_n ?
3. Quelle est la somme des éléments de l_n ? On pourra commencer par calculer celle de l_1, l_2 et l_3 .

Solution

1. n=11,
2. U2010=0,5(U1024 – 39)=1/4(U512 – 39)=1/8(U256 – 39)=…=(1/32)(U64 – 39)=1/32U26

   U26=1/2U16-6=1/2U10=1/8. Donc U2010=1/256.

3. $S_{n+1}=(3/2)S_n$, $S_{11}=\left(\frac{3}{2}\right)^{11}$.