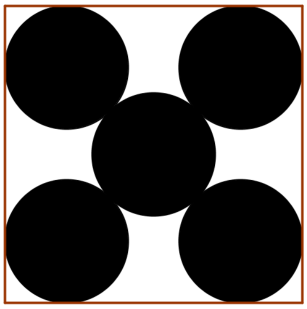
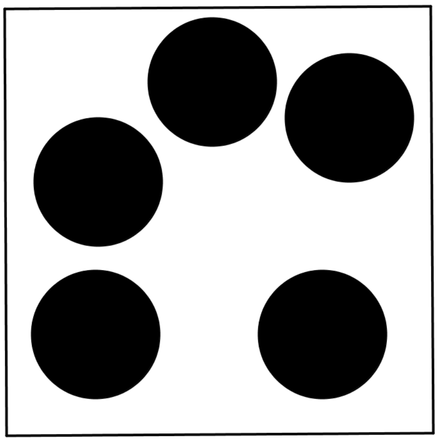
Sujet S

Cinq cercles dans un carré

1. Cinq cercles de rayon 1cm ont été placés dans un carré comme l'indique le dessin. Les cercles sont tangents entre eux et tangents aux côtés du carré. Déterminer la longueur d'un côté du carré.



2. On se propose de déterminer la longueur du côté du plus petit carré contenant cinq cercles de rayon 1cm disjoints ou tangents extérieurement.



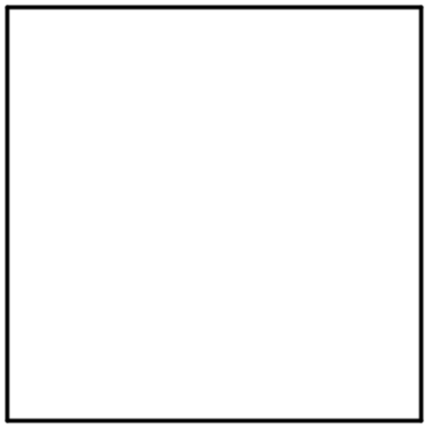


Figure 1

a. Déterminer et représenter sur la figure 1 l'ensemble D des points qui peuvent être le centre d'un cercle de rayon 1cm, ce cercle étant intérieur au carré.

b. Quel est le côté du plus petit carré contenant deux points distants de 2cm ? Justifier la réponse.

c. Quel est le côté du plus petit carré contenant cinq points distants, deux à deux, d'au moins 2cm. Justifier la réponse. (On pourra s'aider de la figure 2)

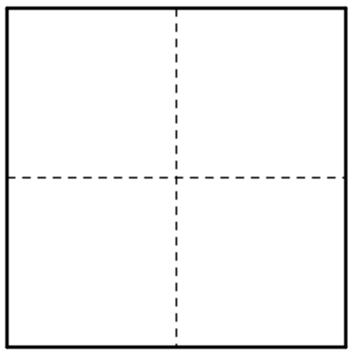


Figure 2

d. Conclure

EUROPE – AFRIQUE – ASIE

EXERCICE 1

On dit qu'un nombre entier est *digisible* lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- aucun de ses chiffres n'est nul ;
- il s'écrit avec des chiffres tous différents ;
- il est divisible par chacun d'eux.

Par exemple,

- 24 est *digisible* car il est divisible par 2 et par 4.
- 324 est *digisible* car il est divisible par 3, par 2 et par 4.
- 32 n'est pas *digisible* car il n'est pas divisible par 3.

On rappelle qu'un nombre entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

1. Proposer un autre nombre *digisible* à deux chiffres.

2. Proposer un nombre *digisible* à quatre chiffres.

3. Soit n un entier *digisible* s'écrivant avec un 5.

a. Démontrer que 5 est le chiffre de ses unités.

b. Démontrer que tous les chiffres de n sont impairs.

c. Démontrer que n s'écrit avec au plus quatre chiffres.

d. Déterminer le plus grand entier *digisible* s'écrivant avec un 5.

4. Soit n un entier *digisible* quelconque.

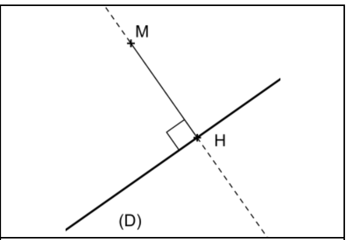
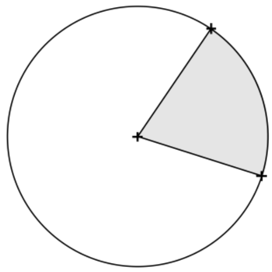
a. Démontrer que n s'écrit avec au plus sept chiffres.

b. Si n s'écrit avec sept chiffres, dont un 9, déterminer les chiffres de n.

c. Déterminer le plus grand entier *digisible*.

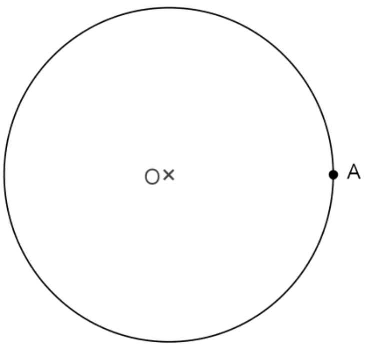
EXERCICE 2

Rappels

• *On appelle **distance entre un point M et une droite (D)** la distance MH, où H est le point d'intersection de (D) avec la droite perpendiculaire à (D) passant par M.*	
• *Dans la figure ci-contre, si le rayon du disque est R, et si l'angle du secteur angulaire grisé mesure α (en degrés), alors **l'aire de la portion de disque** grisée vaut* $\pi\alpha R^2/360$. *Dans la partie II de l'exercice, on considérera la distance d'un point M à **un segment [**BC] comme étant la distance du point M à la droite (BC).*	

Partie I

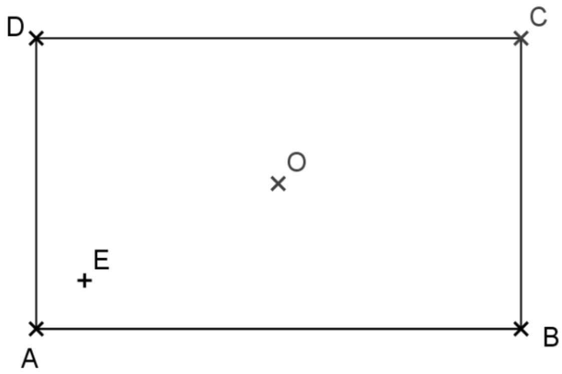
Soit C un cercle de centre O, A un point de ce cercle et D le disque délimité par ce cercle.



1. Reproduire la figure, et représenter l'ensemble des points du disque équidistants de O et de A.
2. Hachurer l'ensemble des points du disque plus proches de O que de A.
3. Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable sur la surface du disque D.
   Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de A ?

Partie II

Soit ABCD un rectangle de longueur AB = 20 cm et de largeur BC = 12 cm, de centre O.
Soit E un point situé à l'intérieur du rectangle, proche de A, à 2 cm de chaque bord (comme sur la figure ci-après, qui n'est toutefois pas à l'échelle).
Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable à l'intérieur du rectangle ABCD.



1. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AD] ?

2. ***a.*** Reproduire le rectangle, et représenter l'ensemble des points intérieurs au rectangle et équidistants des côtés [AB] et [BC].

b. Hachurer l'ensemble des points intérieurs au rectangle et plus proches du côté [BC] que du côté [AB].

c. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AB] ?

3. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [AB] que des trois autres côtés [BC], [CD] et [DA] ?

4. Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de E ?

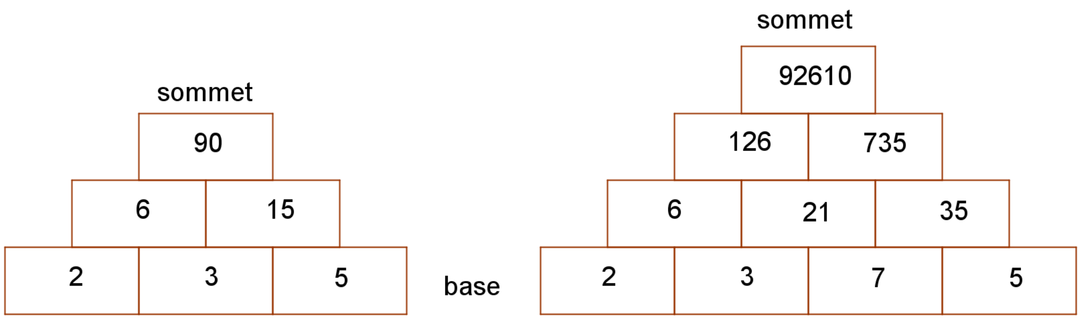
5. Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que des quatre sommets A, B, C et D ?

Sujet non S

Pyramides multiplicatives

On appelle pyramide multiplicative une pyramide formée de nombres entiers différents de 0 et de 1 et telle que le nombre écrit dans une case est le produit des deux nombres écrits dans les cases du dessous.

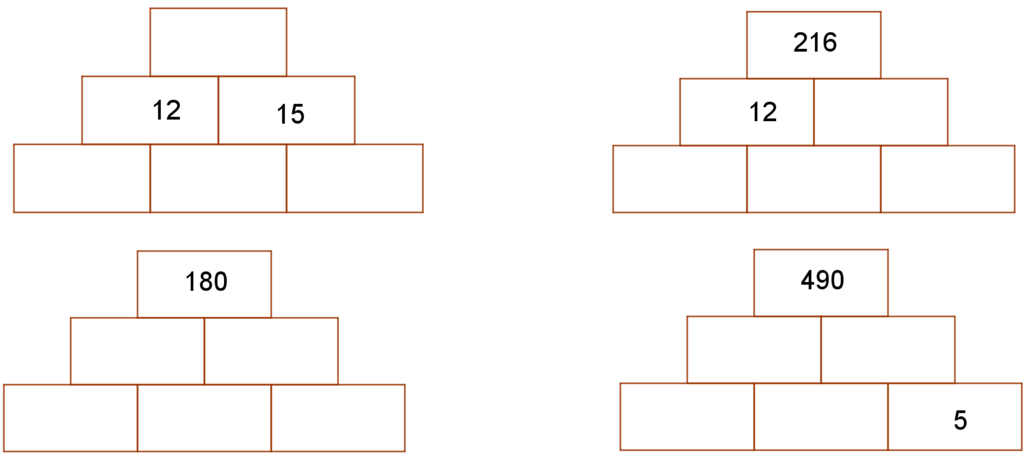
Exemple :



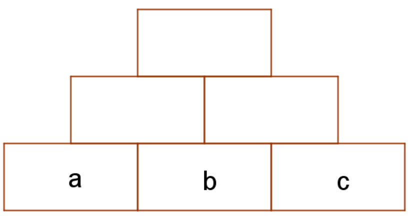
Pyramide à trois étages

Pyramide à quatre étages

1. **Pyramides à trois étages**
   a. Donner toutes les pyramides possibles dans les cas suivants :



   b. Compléter la pyramide ci-dessous :

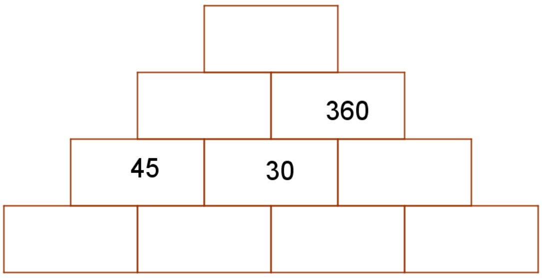


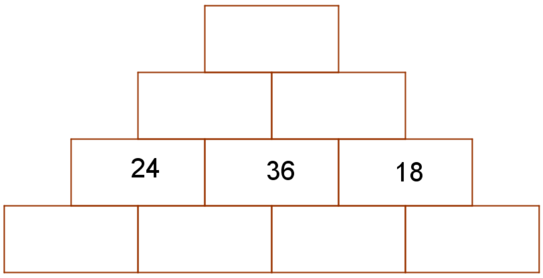
Peut-on trouver une pyramide à trois étages

dont le sommet est 110 ? 90 ? Justifier

2. **Pyramides à quatre étages**

a. Donner toutes les pyramides possibles dans les cas suivants :





b. Peut-on trouver une pyramide à quatre étages dont le sommet est 1260 ? Justifier

3. Trouver une pyramide, la plus haute possible, dont le sommet est $2^4 \times 3^6 \times 5^4 \times 7^2$.

Sujet S

Pavé droit

1. L, S et V étant trois nombres réels positifs, montrer que les triplets (a,b,c) solutions du système
$$\begin{cases} a+b+c=L \\ ab+ac+bc=S \\ abc=V \end{cases}$$
sont tels que a, b et c sont les solutions de l'équation $X^3-LX^2+SX-V=0$.
2. Déterminer les dimensions d'un pavé droit dont la somme des longueurs de toutes ses arètes est de 20cm, la somme des aires des six faces est de 14cm^2 et dont le volume est de 3cm^3.
3. Quels sont les volumes minimum et maximum d'un pavé droit dont la somme des longueurs de toutes les arètes est de 20cm, la somme des aires des six faces est de 14cm^2.

SUJET non S

Les sextuplés de M et Mme Logic sont dans la même classe de 2^{nde} .

A la fin de la journée au cours de laquelle ils ont eu un contrôle de mathématiques, ils rentrent chez eux et présentent à leurs parents les réponses qu'ils ont fournies aux diverses questions.

	Alix	**Béa**	**Carol**	**Delphine**	**Emile**	**Félix**
Question1	150	700	150	100	700	150
Question 2	103	101	101	101	103	35
Question3	101	732	107	101	101	107
Question4	34	125	216	28	34	34
Question5	216	216	27	55	25	103

« Papa, peux-tu nous dire combien nous avons chacun ? »

- Je veux bien, mais vous ne m'avez pas donné les questions !
- On ne les a pas, on a dû rendre le sujet avec les réponses.
- Moi, je me rappelle qu'il fallait trouver le plus petit nombre premier après 100, dit Béa.
- Il fallait aussi calculer le volume d'un cube dont le côté était un entier, je ne me rappelle plus lequel, rajoute Félix
- On demandait aussi l'âge du capitaine de je ne sais quel bateau se souvient Carol.
- C'est tout ce que vous vous rappelez, demande le père ?
- Oui, mais en regardant rapidement les copies, le professeur nous a dit que l'un d'entre nous avait tout juste … et un autre tout faux !

Au bout d'un moment, leur père leur annonce qu'il connaît leurs notes.

Quelles sont ces notes (chaque réponse juste rapporte 4 points) et quel est l'âge du capitaine ? Vous détaillerez le raisonnement qui vous a conduit au résultat.