académie
Bordeaux

MINISTÈRE DE
L'ÉDUCATION NATIONALE

MINISTÈRE DE
L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

CLASSE DE PREMIÈRE

20 mars 2013
Durée de l'épreuve : 4 heures

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.

Les calculatrices de poche sont autorisées conformément à la règlementation en vigueur

Les candidats de la série S doivent traiter les exercices : 1, 2, 3S et 4S.

Les candidats des séries autres que S doivent traiter les exercices : 1, 2, 3A et 4A.

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

EXERCICE 1 : LES NOMBRES HARSHAD

<u>Exercice commun à tous les candidats</u>

Un entier naturel non nul est un **nombre Harshad** s'il est divisible par la somme de ses chiffres.
Par exemple, $n = 24$ est un nombre Harshad car la somme de ses chiffres est $2 + 4 = 6$, et 24 est bien divisible par 6.

1. ***a.*** Montrer que 364 est un nombre Harshad.
b. Quel est le plus petit entier qui ne soit pas un nombre Harshad ?

2. ***a.*** Donner un nombre Harshad de 4 chiffres.
b. Soit n un entier non nul. Donner un nombre Harshad de n chiffres.

3. ***a.*** Montrer que 110, 111, 112 forment une liste de trois nombres Harshad consécutifs.
b. En insérant judicieusement le chiffre 0 dans l'écriture décimale des nombres précédents, construire une autre liste de trois nombres Harshad consécutifs.
c. Justifier l'existence d'une infinité de listes de trois nombres Harshad consécutifs.

4. ***a.*** Soit $A = 30 \times 31 \times 32 \times 33$. Calculer la somme des chiffres de A.
b. En déduire que 98 208 030, 98 208 031, 98 208 032 et 98 208 033 forment une liste de quatre nombres Harshad consécutifs.
c. Justifier l'existence d'une infinité de listes de quatre nombres Harshad consécutifs.

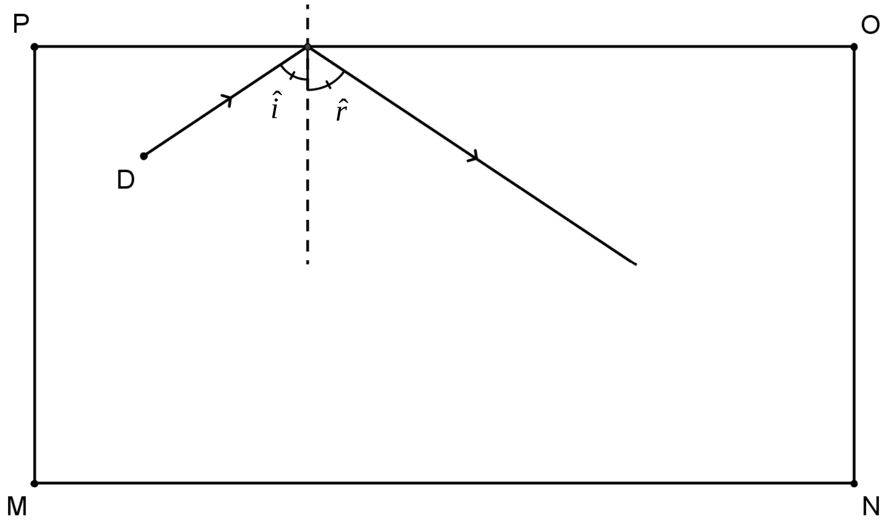
5. ***a.*** En s'inspirant de la question 4, trouver une liste de cinq nombres Harshad consécutifs.
b. Justifier l'existence d'une infinité de listes de cinq nombres Harshad consécutifs.

6. ***a.*** Soit i un chiffre compris entre 0 et 8.
Soit p un entier dont le chiffre des dizaines est i et le chiffre des unités est 9.
Montrer que soit la somme des chiffres du nombre p soit celle de $p + 2$ est un nombre pair.
En déduire que p et $p + 2$ ne peuvent pas être tous les deux des nombres Harshad.
b. Existe-t-il une liste de 22 nombres Harshad consécutifs ?

EXERCICE 2 : LE BILLARD RECTANGULAIRE

<u>Exercice commun à tous les candidats</u>

On considère un billard de forme rectangulaire, de longueur 300 cm et de largeur 160 cm dont les boules sont assimilées à des points.
Entre deux rebonds toutes les trajectoires sont rectilignes.
Lorsque la boule atteint l'un des bords (rails) du billard, elle y rebondit suivant les règles de la physique des chocs élastiques : l'angle d'incidence $\hat{i}$ étant égal à l'angle de réflexion $\hat{r}$, comme sur la figure suivante ($\hat{i} = \hat{r}$).



1. On frappe une boule placée au milieu du rail [MN].
   a. Quel point du rail [PO] peut-on viser pour que la boule atteigne le point N en une bande (c'est-à-dire avec un seul rebond) ?
   b. Quel point du rail [PO] peut-on viser pour que la boule atteigne en une bande le milieu du rail [NO] ?
   c. Quel point du rail [NO] peut-on viser pour que la boule revienne à son point de départ en trois bandes (c'est-à-dire après exactement trois rebonds) ?

2. On frappe une boule placée en un point quelconque du rail [MN].
   a. Est-il possible d'atteindre en une bande n'importe quelle boule placée sur la surface de jeu ?
   b. Est-il toujours possible de la frapper de sorte qu'elle revienne en trois bandes à son point initial ?

EXERCICE 3S : LA SOMME DES CHIFFRES

Exercice réservé aux candidats inscrits en série S

Pour tout entier naturel n, on désigne par $s(n)$ la somme des chiffres de l'écriture décimale de n.
Ainsi $s(2013) = 2 + 0 + 1 + 3 = 6$.
On se propose de déterminer l'ensemble E des couples (a, b) d'entiers naturels qui vérifient les trois conditions suivantes :

(C1) $b < a$ **(C2)** b est un multiple de 9 **(C3)** $a = \left(s(b)\right)^2$

1. Vérifier que le couple (324, 189) appartient à l'ensemble E.

2. On désigne par (a, b) un couple d'entiers naturels qui appartient à E.
   a. Démontrer que l'entier a est un multiple de 81.
   b. Soit k le nombre de chiffres de l'écriture décimale de b, le premier chiffre à gauche étant non nul.
   Démontrer que $k \leq 4$. En déduire que $a \leq 1296$.
   c. En déduire les valeurs possibles de a et celles de $s(b)$.

3. Déterminer tous les couples appartenant à l'ensemble E.

EXERCICE 4S : DES TRIANGLES RECTANGLES DE PÉRIMÈTRE 1

Exercice réservé aux candidats inscrits en série S

L'objet de l'exercice est d'étudier l'ensemble F des couples (x, y) de réels tels que x et y sont les mesures des longueurs de deux côtés d'un triangle rectangle dont le périmètre est égal à 1.

1. Parmi les couples suivants lesquels appartiennent à F ?

a. $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$ ***b.*** $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{6}\right)$ ***c.*** $\left(\frac{13}{30}, \frac{1}{6}\right)$

2. On désigne par (a, b) un couple appartenant à l'ensemble F.

a. Le couple (b, a) appartient-il à F ?

b. Démontrer que les réels a et b appartiennent tous les deux à l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right[$.

3. On désigne par ABC un triangle rectangle en C dont le périmètre est égal à 1 et on pose a = BC, b = CA et c = AB.

a. Démontrer que $b = \frac{1-2a}{2(1-a)}$.

b. Exprimer c en fonction de a.

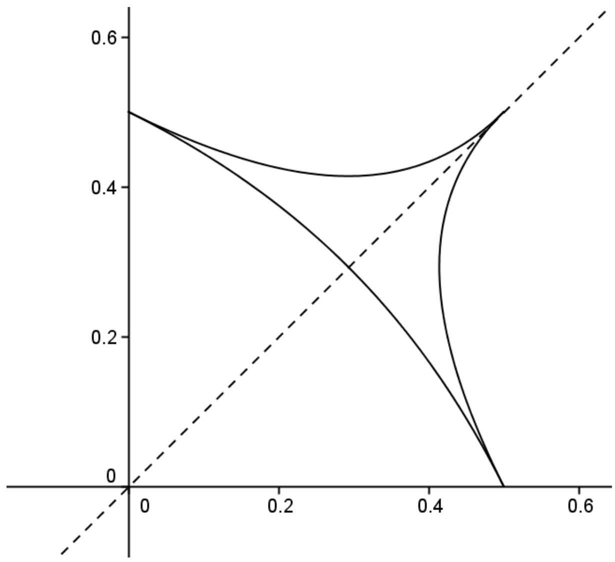
4. Soient f et g les fonctions définies sur l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ par :

$$f(x) = \frac{1-2x}{2(1-x)} \text{ et } g(x) = -x + \frac{1}{2(1-x)}$$

Vérifier que pour tout réel x de l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right[$, les couples $\left(x, f(x)\right)$ et $\left(x, g(x)\right)$ appartiennent à F.

5. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on a représenté ci-contre l'ensemble des points M(x, y) où (x, y) appartient à F.

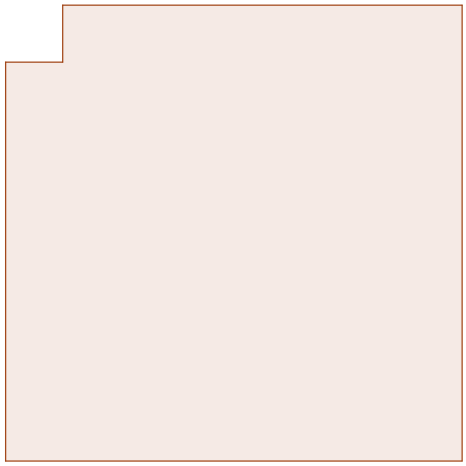
Déterminer les valeurs de y pour lesquelles il existe quatre couples distincts (x_1, y), (x_2, y), (x_3, y), (x_4, y) appartenant à l'ensemble F.



EXERCICE 3A : UN CARRÉ TRONQUÉ

Exercice réservé aux candidats n'étant pas inscrits en série S

On dispose d'un carré de 8 cm de côté. Dans un des coins, on a découpé un petit carré de 1 cm de côté comme sur le schéma ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur.



1. On désire partager le polygone obtenu en n carrés d'aires égales.

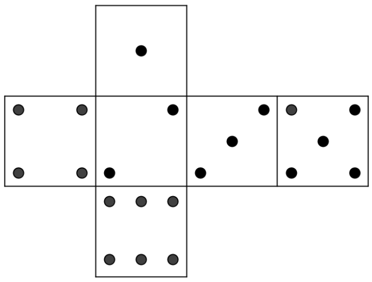
   Quelle est la valeur minimale de n ?
2. Reprendre la question **1** avec des rectangles d'aires égales.
3. Reprendre la question **1** avec des triangles d'aires égales.

Les réponses seront soigneusement justifiées.

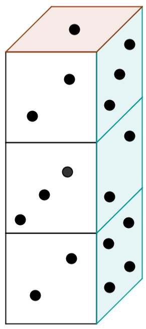
EXERCICE 4A : AVEC DÉDÉ…

Exercice réservé aux candidats n'étant pas inscrits en série S

On dispose de plusieurs dés, tous identiques, dont un patron est donné ci-contre.



1. En empilant trois de ces dés, on a obtenu la colonne ci-contre.
   - ***a.*** Calculer la somme des points inscrits sur les faces visibles de la pile (attention, le dessin ne montre pas toutes les faces visibles).
   - ***b.*** Calculer le produit des points inscrits sur les faces visibles de la pile.
   - ***c.*** Quelle est la plus grande somme que l'on peut obtenir avec les faces visibles en empilant trois dés ? Représenter une colonne de trois dés correspondant à cette somme maximale.
   - ***d.*** Quel est le plus grand produit que l'on peut obtenir avec les faces visibles en empilant trois dés ? Représenter une colonne de trois dés correspondant à ce produit maximal.



2. On empile à nouveau plusieurs de ces dés. La somme des points marqués sur les faces visibles est égale à 143.
   Combien y a-t-il de dés ? Quel est le nombre inscrit sur la face supérieure de la pile ?
3. Un certain nombre de dés ont été jetés sur la table. La somme des points marqués sur les faces supérieures est égale à 18, leur produit est égal à 135. Combien y a-t-il de dés ?