



MINISTÈRE DE
L'ÉDUCATION NATIONALE

MINISTÈRE DE
L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

CLASSE DE PREMIÈRE

19 mars 2014

Durée de l'épreuve : 4 heures

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.

***Les calculatrices de poche sont autorisées
conformément à la réglementation en vigueur***

***Les candidats de la série S doivent traiter les exercices :
1, 2, 3S et 4S.***

***Les candidats des séries autres que S doivent traiter les exercices :
1, 2, 3A et 4A.***

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.

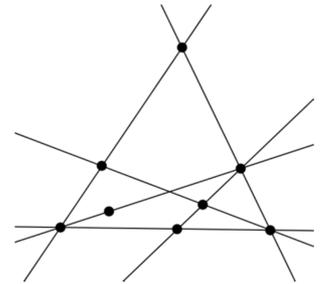
EXERCICE 1 : FIGURES ÉQUILIBRÉES

Exercice national commun à tous les candidats

La figure ci-contre est constituée d'un ensemble de droites (ici, 6 droites) et de points marqués (ici, 8 points).

Elle possède la propriété suivante :

Sur chacune de ces droites, il y a exactement trois points marqués.



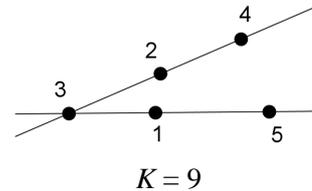
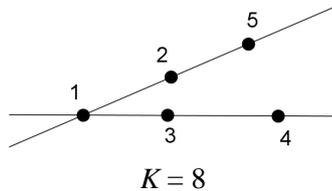
Une figure vérifiant cette propriété est dite **équilibrée**.

1. Construire une figure équilibrée constituée :

- de 7 points marqués et 5 droites ;
- de 9 points marqués et 8 droites.

Dans la suite, on considère une figure équilibrée comportant p points marqués qu'on a numérotés par les entiers de 1 à p . Cette numérotation est alors dite **magique** s'il existe un entier K , tel que la somme des trois entiers (correspondant à la numérotation des points marqués) de chaque droite de la figure est égale à K . Cet entier K est appelé **constante magique** de la numérotation.

2. Voici par exemple une figure équilibrée (avec 2 droites et 5 points marqués) ayant plusieurs numérotations magiques :



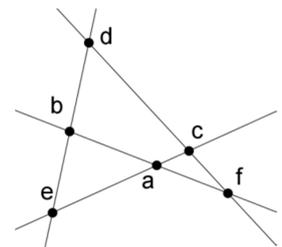
Trouver une numérotation de cette figure qui ne soit pas magique.

Trouver une numérotation magique de cette figure dont la constante magique n'est ni 8 ni 9.

3. La figure équilibrée ci-contre est constituée de 6 points et 4 droites.

Les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, affectés aux points marqués dans un certain ordre, sont notés a, b, c, d, e, f sur la figure.

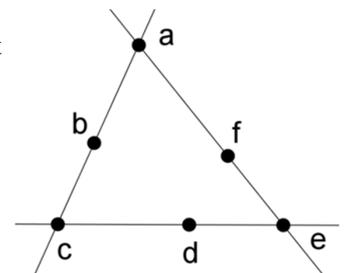
- Démontrer que si la figure est magique, de constante magique K , alors $4 \times K = 42$.
- Peut-on trouver une numérotation magique de cette figure ?
Si oui, la donner ; si non, expliquer pourquoi.



4. La figure équilibrée ci-contre est constituée de 6 points et 3 droites.

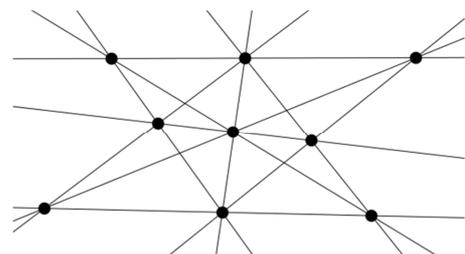
Les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, affectés aux points marqués dans un certain ordre, sont notés à nouveau a, b, c, d, e, f sur la figure.

- Démontrer que $a + c + e$ est compris entre 6 et 15.
- Démontrer que si la numérotation de cette figure est magique, de constante K , alors $a + c + e = 3(K - 7)$.
- Déterminer la(les) constante(s) magique(s) pour cette figure.



5. La figure équilibrée ci-contre est constituée de 9 points et 10 droites.

Cette figure admet-elle une numérotation magique ?



EXERCICE 2 : LE PLUS COURT POSSIBLE

Exercice national commun à tous les candidats

Quatre villes – Alençon, Bélançon, Célançon et Délançon – sont situées aux quatre sommets d'un carré dont le côté mesure 100 km.

La Direction Départementale de l'Équipement souhaite les relier les unes aux autres par le réseau routier le plus court possible.

Partie A

« On pourrait construire des routes allant d'Alençon à Bélançon, puis Célançon, puis Délançon » dit l'assistant n°1.

« Ou alors, on pourrait construire deux routes diagonales : une d'Alençon à Célançon et l'autre de Délançon à Bélançon » propose l'assistant n°2.

« Et pourquoi pas, construire une route semi-circulaire complétée par deux segments ? » propose l'assistant n°3.

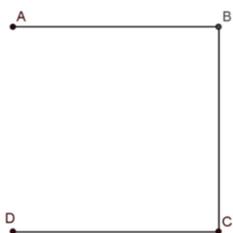


fig. 1 - Assistant n°1

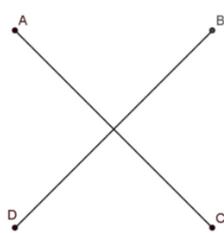


fig. 2 - Assistant n°2

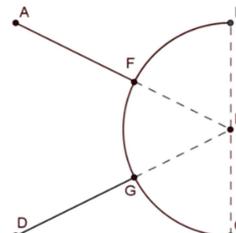


fig. 3 - Assistant n°3

1. Quel assistant propose le réseau routier le plus court ?

2. Un mathématicien qui était présent propose une autre solution :

« On pourrait relier Alençon et Délançon par un triangle isocèle (triangle AED de la fig. 4), puis Bélançon et Célançon par un triangle isocèle de même forme (triangle BFC) et relier les deux sommets E et F comme le suggère la figure ci-contre » :

Si $EF = 20$ km, le réseau routier envisagé sur la figure 4 est-il plus court que ceux proposés par les assistants ?

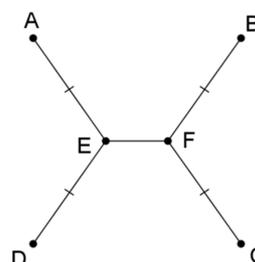


fig. 4

Partie B

Dans cette partie, on souhaite prouver que le réseau routier le plus court est effectivement du modèle proposé par le mathématicien. On cherchera par la suite la longueur EF qui réalise ce plus court chemin.

Rappels de géométrie :

Si A, B, C sont trois points du plan, en notant AB la distance entre A et B :

on a toujours $AB + BC \geq AC$;

on a l'égalité $AB + BC = AC$ si, et seulement si, B appartient au segment $[AC]$.

On admettra aussi que si on trace une courbe quelconque entre A et B , la longueur de la courbe est toujours supérieure ou égale à la longueur du segment $[AB]$ (le plus court chemin étant la ligne droite).

1. Revenons à notre réseau routier.

On admettra qu'on peut sans restreindre la généralité supposer que le réseau solution est formé de deux courbes joignant les sommets opposés (A et C d'une part, B et D d'autre part), et que ces courbes sont à l'intérieur du carré de 100km de côté, comme sur la figure 5 suivante.

On considère un réseau formé de deux courbes comme sur la figure 5.

En parcourant la route entre Alençon et Célançon en partant d'Alençon, on appelle E_0 le premier point d'intersection rencontré et F_0 le dernier point d'intersection rencontré (ces deux points pouvant être confondus). (fig. 5).

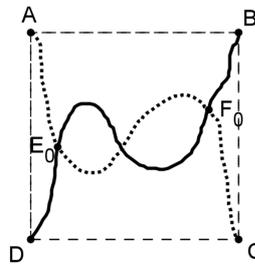


fig. 5

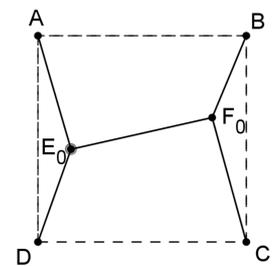


fig. 6

Montrer qu'alors la longueur du réseau de la fig. 5 est supérieure ou égale à celle du réseau suivant, constitué de segments (fig. 6).

2. On considère les droites Δ_E et Δ_F , parallèles à (AD) passant par E_0 et F_0 (voir figure 7 ci-dessous).

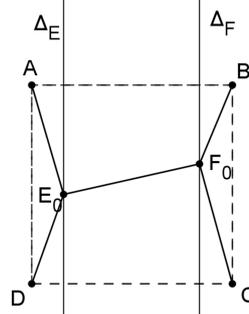


fig. 7

a. Déterminer le point E de Δ_E tel que la somme des distances $DE + EA$ soit minimale.

On appelle F le point trouvé en faisant le même raisonnement pour F_0 .

b. Montrer que $EF \leq E_0F_0$.

c. Dédurre de ce qui précède que le réseau recherché est nécessairement de la forme ci-dessous où E et F sont sur la médiatrice du segment $[AD]$ (fig. 8).

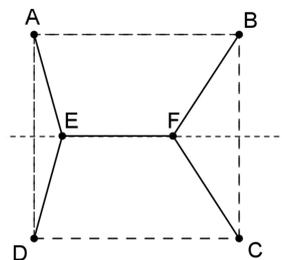


fig. 8

3. On admettra que dans le réseau recherché, les points E et F doivent être de part et d'autre de la médiatrice de $[AB]$.

a. Justifier que le réseau recherché doit être symétrique par rapport à la médiatrice de $[AB]$.

b. D'après ce qui précède, le réseau recherché a donc la même forme que celui que proposait le mathématicien (fig. 4).

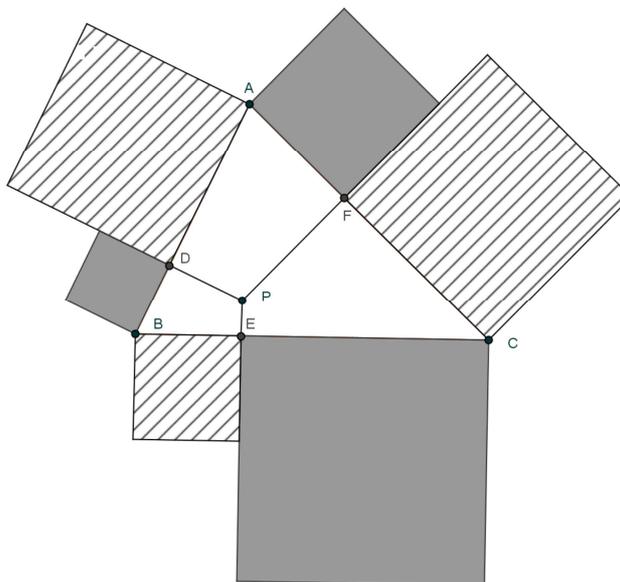
Pouvez-vous l'aider à déterminer la longueur EF pour laquelle ce type de réseau routier sera le plus court possible ?

c. Quelle est alors la valeur de l'angle DEA ?

EXERCICE 3S : PLEIN DE CARRÉS

Exercice réservé aux candidats inscrits en série S

ABC est un triangle ayant trois angles aigus.
 P est un point intérieur à ce triangle qui se projette orthogonalement sur les côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$ respectivement en D , E et F .
 À l'extérieur du triangle, on construit alors six carrés comme sur la figure.



1. Montrer que la somme des aires des carrés « grisés » est égale à celle des carrés hachurés.

2. Démontrer que :

$$AF^2 + FC^2 = \frac{1}{2}[AC^2 + (AF - FC)^2]$$

3. Où doit se trouver le point P pour que la somme des aires des carrés hachurés soit minimale ?

4. L'objet de cette question est de déterminer les mesures a , b et c des côtés du triangle ABC sachant que ce sont des entiers naturels vérifiant $0 < a \leq b \leq c$ et que le minimum évoqué à la question 3 est égal à 2014.

- a. Démontrer que $a^2 + b^2 + c^2 = 8056$.
- b. En déduire que $1 \leq a \leq 51$ et $52 \leq b \leq 89$.
- c. Compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il affiche les triplets (x, y, z) d'entiers naturels tels que $x^2 + y^2 + z^2 = 8056$ et $0 < x \leq y \leq z$.

Variables : X, Y, Z sont des entiers naturels

Traitement : Pour X allant de 1 à 51
 Pour Z allant de 52 à 89

...

...

...

Fin de boucle Pour

Fin de boucle Pour

Fin d'algorithme

- d. On utilisant le fait que les angles du triangle ABC sont aigus, démontrer que $a^2 + b^2 > c^2$.
 En déduire les mesures des côtés du triangle ABC .

EXERCICE 4S : NOMBRES SPHÉNIQUES ABONDANTS

Exercice réservé aux candidats inscrits en série S

Un nombre premier n a que deux diviseurs distincts : 1 et lui-même. La liste des nombres premiers est :
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, ...

On dit qu'un entier naturel n est abondant si la somme de tous ses diviseurs (y compris 1 et n) est strictement supérieure ou égale à $2n$. Lorsque cette somme est strictement inférieure à $2n$, on dit que n est déficient.

Par exemple, la somme des diviseurs de 12 est $1+2+3+4+6+12=28$. Or $28 > 2 \times 12$, donc 12 est abondant.

On dit qu'un entier naturel n est sphénique s'il est le produit de trois nombres premiers différents.

Par exemple, $12 = 2 \times 2 \times 3$ n'est pas sphénique. $30 = 2 \times 3 \times 5$ est le plus petit entier sphénique.

1. a. 2014 est-il un entier sphénique ? Est-il abondant ?
b. Vérifier que 230 et 231 sont deux entiers consécutifs sphéniques.
c. Vérifier que 1309, 1310 et 1311 sont trois entiers consécutifs sphéniques.
d. Est-il possible de trouver quatre entiers consécutifs sphéniques ?
2. Soit n un entier sphénique $n = p \times q \times r$ où p, q et r sont trois nombres premiers tels que $2 \leq p < q < r$.
a. Donner 8 diviseurs de n . On admettra que ce sont les seuls diviseurs de n .
Démontrer que leur somme est égale à $(p+1)(q+1)(r+1)$.
b. En déduire que n est abondant si et seulement si $\left(1 + \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{1}{q}\right)\left(1 + \frac{1}{r}\right) > 2$.
c. En déduire que si $p \geq 3$, n est déficient.
d. Etude du cas $p = 2$.
Démontrer que si n est abondant si et seulement si $\left(1 + \frac{1}{q}\right)\left(1 + \frac{1}{r}\right) > \frac{4}{3}$.
e. Déterminer tous les nombres sphéniques abondants.

EXERCICE 3A : NOMBRES DE HUIT CHIFFRES

Exercice réservé aux candidats qui ne sont pas inscrits en série S

Le nombre de points attribués au candidat dépendra de la qualité des justifications fournies.

1. Ce réveil donne l'heure sous la forme hh/mm/ss/cc. Par exemple 18/34/10/74 signifie qu'il est 18heures 34 minutes 10 secondes 74 centièmes de seconde.
Quelle est la dernière heure de la journée s'écrivant avec des chiffres distincts ?
2. Le 25 Juin 1987 avait ceci de particulier : sa date 25/06/1987 s'écrit avec huit chiffres distincts.
Quelle est la date suivante ayant cette propriété ?
3. Déterminer un nombre de 8 chiffres ayant les propriétés suivantes :
 - 0 ne figure pas dans le nombre.
 - Tous les chiffres sont distincts
 - Le nombre formé par les 2 premiers chiffres est divisible par 2
 - Le nombre formé par les 3 premiers chiffres est divisible par 3
 - Le nombre formé par les 4 premiers chiffres est divisible par 4
 - Le nombre formé par les 5 premiers chiffres est divisible par 5
 - Le nombre formé par les 6 premiers chiffres est divisible par 6
 - Le nombre formé par les 7 premiers chiffres est divisible par 7
 - Le nombre formé par les 8 premiers chiffres est divisible par 8
4. Dans ce pays, les numéros de téléphone sont des nombres de 8 chiffres et sont attribués au hasard.
Quelle est, à 0,001 près, la probabilité que le numéro de téléphone de Marius ait tous ses chiffres distincts ?

EXERCICE 4A : DOMINOS MAGIQUES

Exercice réservé aux candidats qui ne sont pas inscrits en série S

Un domino est une pièce formée de deux carrés séparés par un trait. Dans chaque carré est inscrit un nombre de points allant de 0 à 6. Ces deux nombres peuvent être égaux, on a alors affaire à un « double ».

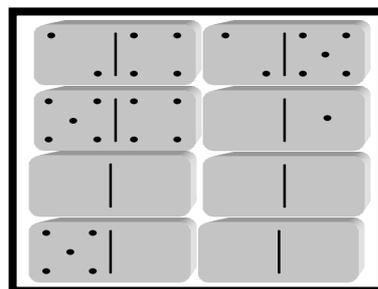
Attention les dominos  et  sont identiques et ne constituent qu'une seule et même pièce.

Dans un jeu de dominos, toutes les pièces sont différentes.

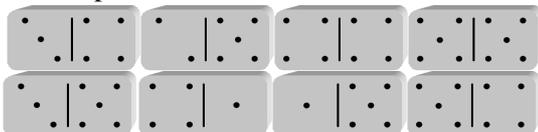
1. Combien y a-t-il de dominos dans un jeu complet ?
2. On appelle carré magique d'ordre 4, un tableau carré de 16 cases tel que la somme des nombres inscrits dans chaque ligne, chaque colonne ainsi que dans les deux diagonales soit identique. Ce nombre noté SM est la somme magique du tableau. On se propose de construire des carrés magiques en utilisant huit dominos extraits d'un même jeu. Ces dominos sont par conséquent tous différents.

- a. Compléter le carré magique ci-contre.

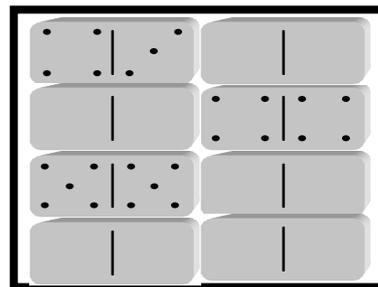
Les cases vides sont soit des cases à compléter avec des points, soit des cases correspondant au chiffre 0.



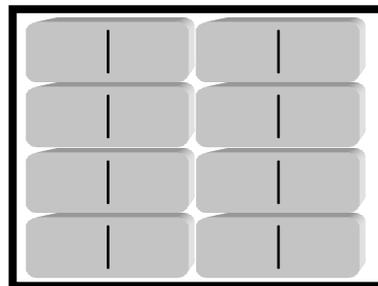
- b. On dispose des huit dominos suivants.



Montrer qu'avec ces dominos on peut remplir un carré magique. Trois d'entre eux sont déjà placés. Attention, parmi les 5 dominos qui restent à placer, certains peuvent être retournés.



- c. Construire un carré magique tel que $SM=19$. On pourra s'aider du précédent.
- d. Justifier qu'on ne peut pas construire un carré magique tel que $SM=20$.
- e. Quelle est la plus petite valeur de SM pour laquelle on peut construire un carré magique ? Pour cette valeur construire un carré magique. On pourra s'aider de c.



3. Les nombres inscrits au bout des flèches indiquent le produit des nombres dans chaque ligne et chaque colonne. Le tableau n'est plus un carré magique.

Le compléter.

