SEMINAIRE INTER - ACADEMIQUE DE MATHEMATIQUES
Bordeaux 24-25 novembre 2009

Atelier A1 : La partie analyse en entrant par la résolution de problèmes

Les exercices suivants ont été choisis parce qu'ils permettent de familiariser les élèves avec des notions de la partie analyse du programme de seconde en s'appuyant sur les acquis du collège. Suivant l'objectif recherché, le professeur met l'accent sur l'un ou l'autre des points signalés.

Chacun des exercices est aussi l'occasion de mettre en œuvre une démarche expérimentale avec utilisation éventuelle de l'outil informatique.

Exercice 1 :

Peut-on trouver des nombres x et y tels que : $x^2 + y^2 = (x+y)^2$?
Même question avec : $x^3 + y^3 = (x+y)^3$

Cet exercice a été proposé à des élèves de seconde au cours des deux premières semaines de septembre. Il a permis de revenir sur des points des programmes de collège comme par exemple :

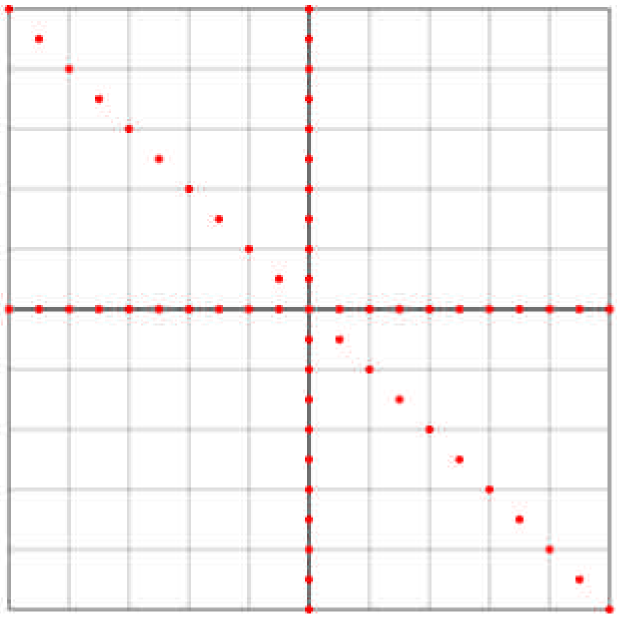
- le calcul littéral
- le sens du signe "égal"
- les rôles respectifs de l'exemple et du contre-exemple, la nécessité de la démonstration pour l'étude du cas général
- la résolution d'équations
- la notion de couples solutions et la représentation graphique dans un repère de l'ensemble de solutions (par exemple l'ensemble des couples de réels (x , y) tels que $y = -x$).

Les professeurs ont noté une entrée facile dans la problématique . Pour la relation $x^2 + y^2 = (x+y)^2$, les élèves ont fréquemment commencé par affirmer qu'il n'y avait pas de solution puis sont revenus sur cette position en citant des exemples de couples possibles, certains sont allés plus loin en justifiant leur réponse par une démonstration (voir diaporama).

Cet exercice a également été l'occasion, dans le cadre de l'apprentissage de la logique et du raisonnement, d'un travail sur les connecteurs logiques *et* et *ou* , les quantificateurs, l'utilisation de l'article défini, de l'article indéfini notamment.

Une recherche de solutions à partir d'un algorithme est possible (ci-dessous, pour la deuxième relation de l'énoncé, parmi les couples d'entiers de l'ensemble $\{-10,..,10\}^2$).

```
VARIABLES
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  y EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  POUR x ALLANT_DE -10 A 10
    DEBUT_POUR
    POUR y ALLANT_DE -10 A 10
      DEBUT_POUR
      SI (pow(x,3)+pow(y,3)==pow(x+y,3)) ALORS
        DEBUT_SI
        TRACER_POINT (x,y)
        FIN_SI
      FIN_POUR
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```



Exercice 2 :

On s'intéresse aux triangles isocèles dont les côtés de même longueur mesurent 6 cm. Parmi ces triangles, en existe-t-il d'aire maximale ? En existe-t-il dont l'aire est égale à 10 cm² , à 50 cm² ?

L'approche expéri mentale ne nécessite pas d'autre connaissance que le calcul de l'aire d'un triangle (voir ci-après avec le logiciel Géoplan, l'affichage demandé étant celui de mesures de longueur ou d'angle et de la valeur de l'aire).

Suivant le choix de la variable (triangle ABC de sommet A) :

- avec BC=x : l'aire a du triangle ABC exprimée en cm² est égale à $\frac{x}{2}\sqrt{36-\frac{x^2}{4}}$ (voir trace du point P).

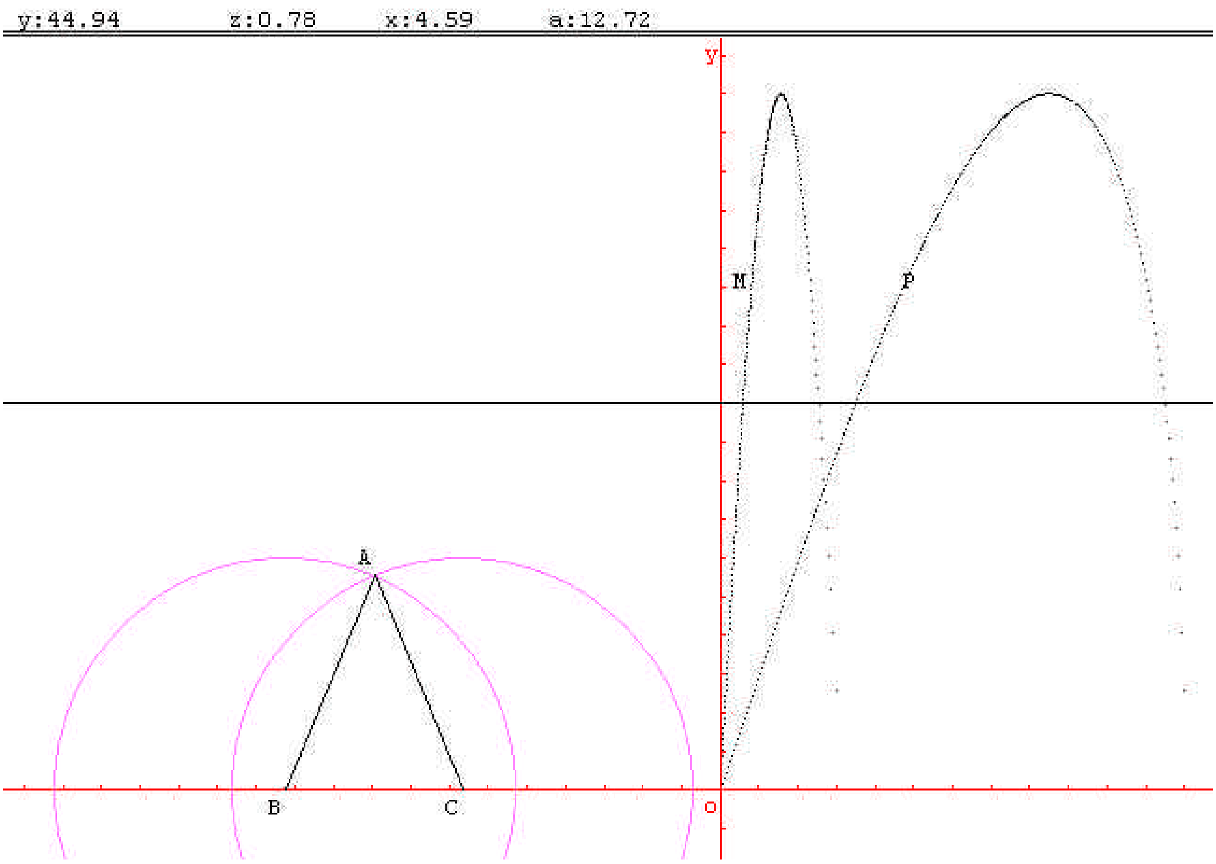
Cette expression peut être utilisée ou non.
Les valeurs possibles de la variable x sont celles de l'intervalle [0 ; 12].

- en fonction de la mesure de l'angle de sommet A : $a = 18 \sin z$ (voir trace du point M, z est exprimé en radians, y est la mesure en degrés sur le schéma ci-après avec $0 \leq y \leq 180$).

Valeur maximale : 18 obtenue pour $x = 6\sqrt{2}$ (cette valeur, correspondant au cas d'un triangle rectangle isocèle s'obtient géométriquement en utilisant la hauteur issue de B pour le calcul de l'aire).

La résolution de l'équation $\frac{x}{2}\sqrt{36-\frac{x^2}{4}} = 10$ peut être faite graphiquement dans un premier temps.
L'utilisation d'un logiciel de calcul formel permet d'obtenir la valeur exacte des solutions.

Copie d'écran à partir du logiciel Géoplan :



Abordés dans cet exercice :

Avec l'expression de *a* en fonction de *x* : ensemble de définition d'une fonction, notion de maximum, recherche du maximum par balayage (algorithme), valeur exacte du maximum, représentation graphique, résolution graphique d'une équation du type *f*(*x*) = k, résolution à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

Avec l'expression de *a* en fonction de la mesure de l'angle de sommet A : trigonométrie de collège, notion de radian (nécessaire pour la lisibilité de la représentation graphique)

<u>Exercice 3 : utilisation d'une fonction définie sur une partie de N :</u>

Une entreprise de transport possède 4 cars de 50 places chacun et se propose d'assurer le transport des supporters d’une équipe de rugby dans une commune où le nombre de supporters ne n'excède jamais 200 personnes. La location d'un car revient à 800 € tout compris.

1) Déterminer et représenter graphiquement le prix par supporter en fonction du nombre de supporters se rendant au stade.

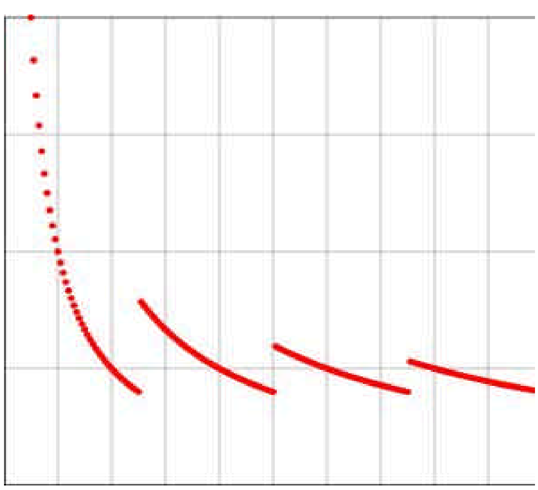
2) Combien l'organisateur peut-il accepter de supporters, s'il s'est engagé à ce que le prix d'une place ne dépasse pas 20€ ?

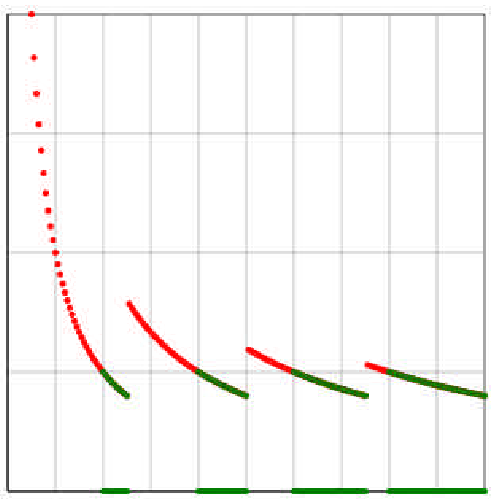
Exemple d'algorithme sous *Algobox* pour le calcul du prix par supporter (cet algorithme donne également le nombre de cars nécessaire):

```
VARIABLES
  Nombredesupporters EST_DU_TYPE NOMBRE
  Supportersencoresansplace EST_DU_TYPE NOMBRE
  Nombredecars EST_DU_TYPE NOMBRE
  Prixtotal EST_DU_TYPE NOMBRE
  Prixunitaire EST_DU_TYPE NOMBRE
  Texte EST_DU_TYPE CHAINE
DEBUT_ALGORITHME
  AFFICHER "Nombre de supporters ?"
  LIRE Nombredesupporters
  Supportersencoresansplace PREND_LA_VALEUR Nombredesupporters
  Nombredecars PREND_LA_VALEUR 0
  Prixtotal PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (Supportersencoresansplace>0) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    Nombredecars PREND_LA_VALEUR Nombredecars+1
    Prixtotal PREND_LA_VALEUR Prixtotal+800
    Supportersencoresansplace PREND_LA_VALEUR Supportersencoresansplace-50
    FIN_TANT_QUE
  Prixunitaire PREND_LA_VALEUR round(100*Prixtotal/Nombredesupporters)/100
  Texte PREND_LA_VALEUR "Pour "+Nombredesupporters+" supporters il faut "+Nombredecars+" car(s)"
  AFFICHER Texte
  Texte PREND_LA_VALEUR "Le coût total est "+Prixtotal+" Euros et le coût par supporter est "+Prixunitaire+" Euros"
  AFFICHER Texte
FIN_ALGORITHME
```

Algorithme pour la représentation graphique des solutions :

```
VARIABLES
     N EST_DU_TYPE NOMBRE
     K EST_DU_TYPE NOMBRE
     cars EST_DU_TYPE NOMBRE
     prix EST_DU_TYPE NOMBRE
   DEBUT_ALGORITHME
     POUR K ALLANT_DE 1 A 200
       DEBUT_POUR
       SI (floor(K/50)==K/50) ALORS
         DEBUT_SI
         cars PREND_LA_VALEUR K/50
         FIN_SI
         SINON
           DEBUT_SINON
           cars PREND_LA_VALEUR floor(K/50)+1
           FIN_SINON
       prix PREND_LA_VALEUR 800*cars/K
       TRACER_POINT (K,prix)
       SI (prix<=20) ALORS
         DEBUT_SI
         TRACER_POINT (K,prix)
         TRACER_POINT (K,0)
         FIN_SI
       FIN_POUR
   FIN_ALGORITHME
```

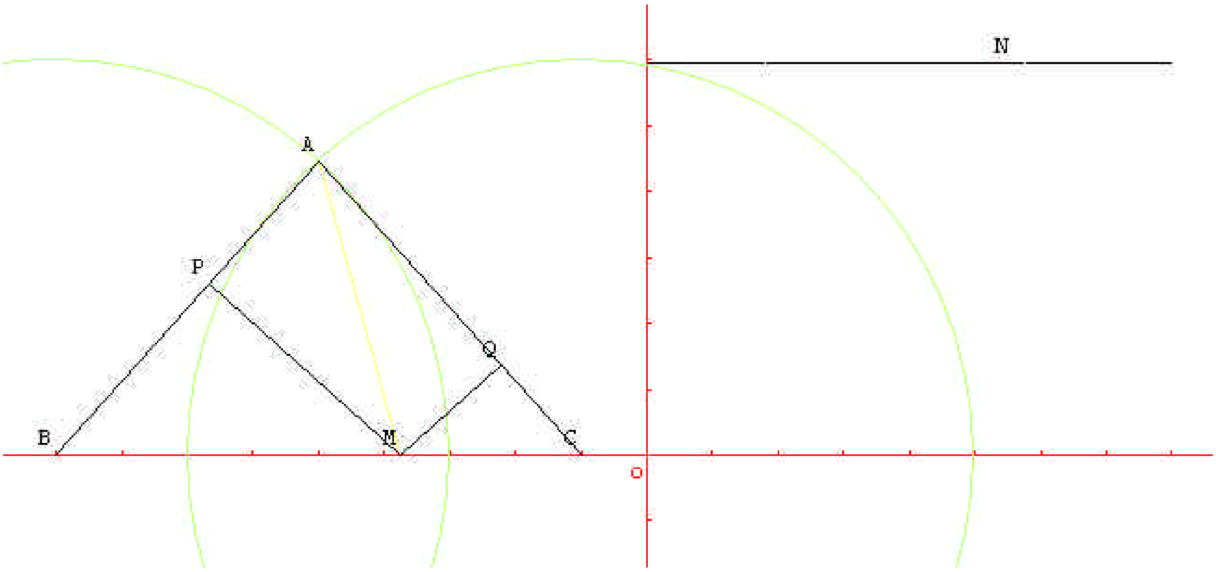




Exercice 4 : Un exemple de fonction constante issu de la géométrie :

ABC est un triangle isocèle de sommet A tel que AB=6 et BC=8. M est un point du segment [BC], P et Q sont les projetés orthogonaux de M sur (AB) et (AC) respectivement.

Étudier comment varie la somme PM+MQ quand M se déplace sur [BC].



Éléments de solution :

Évaluer les aires des triangles AMB et AMQ en fonction de MP et de MQ respectivement. Exprimer l'aire du triangle ABC comme somme de ces deux aires.