Autour d’une expérience aléatoire simple:

Pile ou face

Problème initial

On lance une pièce de monnaie non truquée 1000 fois de suite.

Combien a-t-on de chances d'obtenir plus de 548 piles ?

Situation en classe de seconde

1° Introduction

Que l’on ait 1 chance sur 2 d’obtenir Pile en lançant une pièce bien équilibrée n’est pas un scoop.

et se contenter de simuler des lancers de pièce pour atteindre ce résultat est un peu banal.

Par contre le problème initial que je vous ai proposé réserve quelques surprises.

Nous avons transposé ce problème pour que des élèves puissent réaliser concrètement l’expérience

Voici l’énoncé proposé aux élèves de seconde :

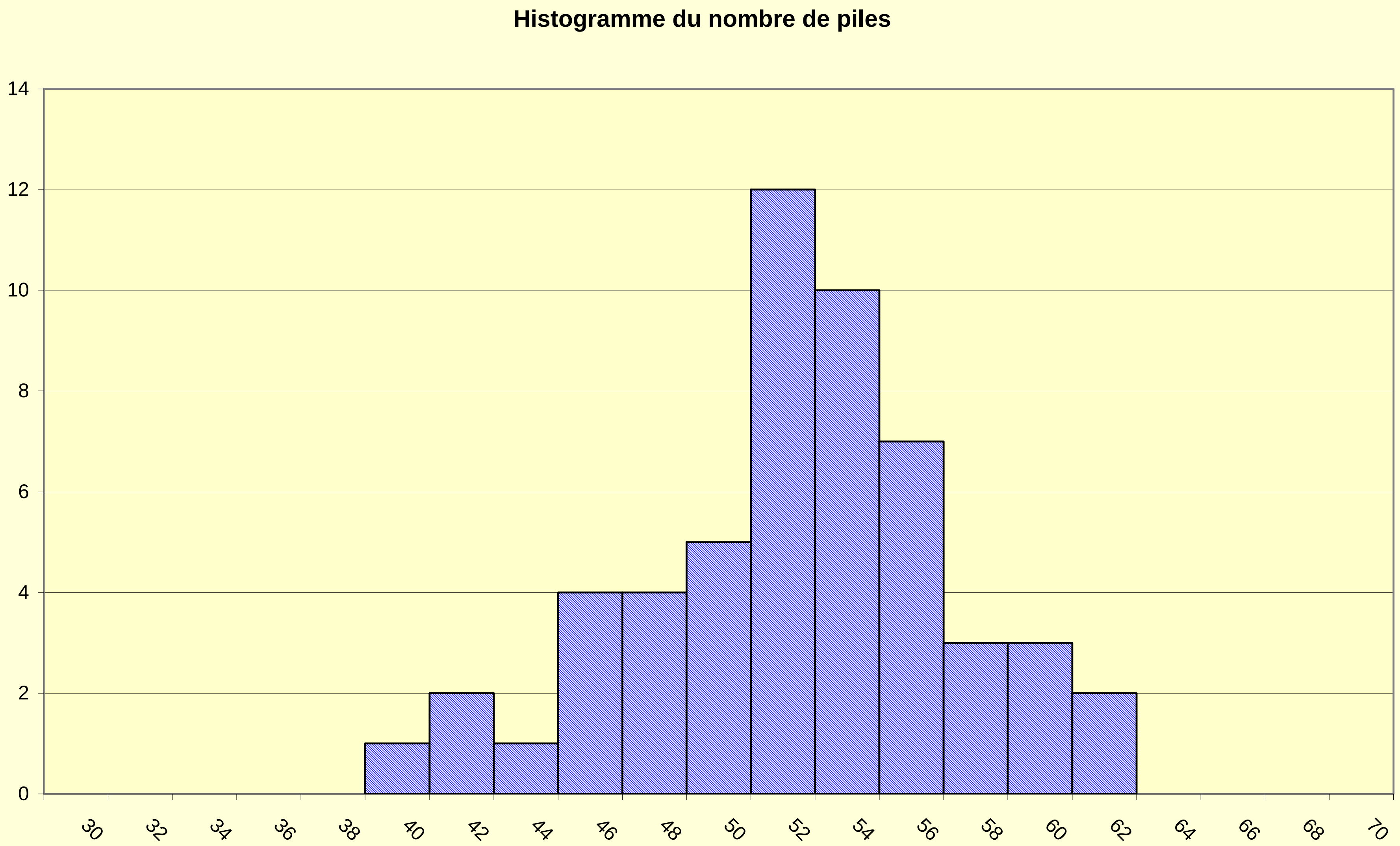
On lance 100 fois de suite une pièce de monnaie non truquée.
Combien de chances a-t-on d’obtenir au moins 60 Piles ?

2° Déroulement d'une expérimentation concrète

La question posée aux 29 élèves de la classe, voici un tableau récapitulatif de leurs réponses

[0 ; 5 [	2
[5 ; 10 [	6
[10 ; 20 [	8
[20 ; 30 [	10
[30 ; 40 [	0
[40 ; 50 [	3

Je leur ai demandé de réaliser concrètement pendant les vacances de Pâques 2 séries de 100 lancers et de reporter les résultats dans une grille fournie.



Sur 54 séries réalisées on en dénombre 2 comportant 60 Piles ou plus.

On peut donc penser que la solution du problème est vraisemblablement dans l’intervalle [0 ; 5]

3° Simulation de 100 séries de 100 lancers sur EXCEL.(1er niveau de simulation)

= SOMME($CY$6:$CY$105)/100

=ENT(2*ALEA())

=SOMME(B6:CW6)

=SI(CX6>=60;1;0)

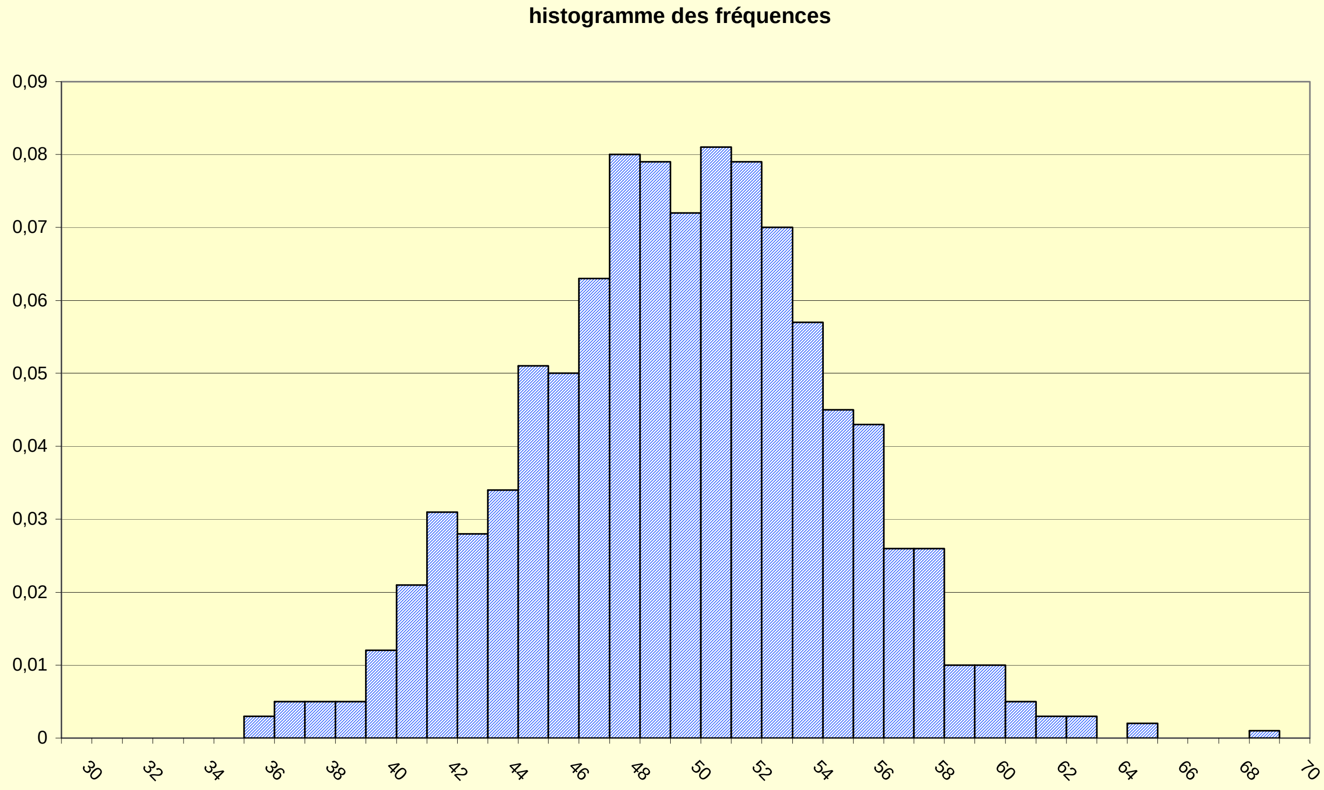
	A	B	C	D	E	F	CH	CI	CJ	CK	CL	CM	CN	CO	CP	CQ	CR	CS	CT	CU	CV	CW	CX	CY
1																								
2																								
3																							Fréquence de l'événement	0,02
4																								
5	série	1	2	3	4	5	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	Nbre de P	>60
6	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	[illegible]	[illegible]
7	2	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	[illegible]	[illegible]
8	3	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	51	0
9	4	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	52	0
10	5	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	51	0
11	6	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	45	0
12	7	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	54	0
13	8	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	55	0
87	82	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	49	0
88	83	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	44	0
89	84	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	47	0
90	85	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	45	0
91	86	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	46	0
92	87	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	48	0
93	88	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	56	0
94	89	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	38	0
95	90	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	56	0
96	91	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	56	0
97	92	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	52	0
98	93	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	50	0
99	94	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	47	0
100	95	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	49	0
101	96	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	47	0
102	97	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	53	0
103	98	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	53	0
104	99	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	52	0
105	100	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	56	0

Le recalcul de la feuille en utilisant la touche F9 fait apparaître une fluctuation de la fréquence de l’événement E entre 0 et 8 %.

Remarque : le nombre d’expériences a seulement doublé, par rapport à la manipulation des élèves et on n’a pas beaucoup gagné en précision.

4° Simulation de 1000 séries de 100 lancers

a) Pour chaque série on calcule la fréquence de Piles et on réalise un histogramme de ces fréquences.



On constate une certaine symétrie du graphique et un centrage autour de 50%, ce qui est banal, l'allure de la courbe l'est moins.

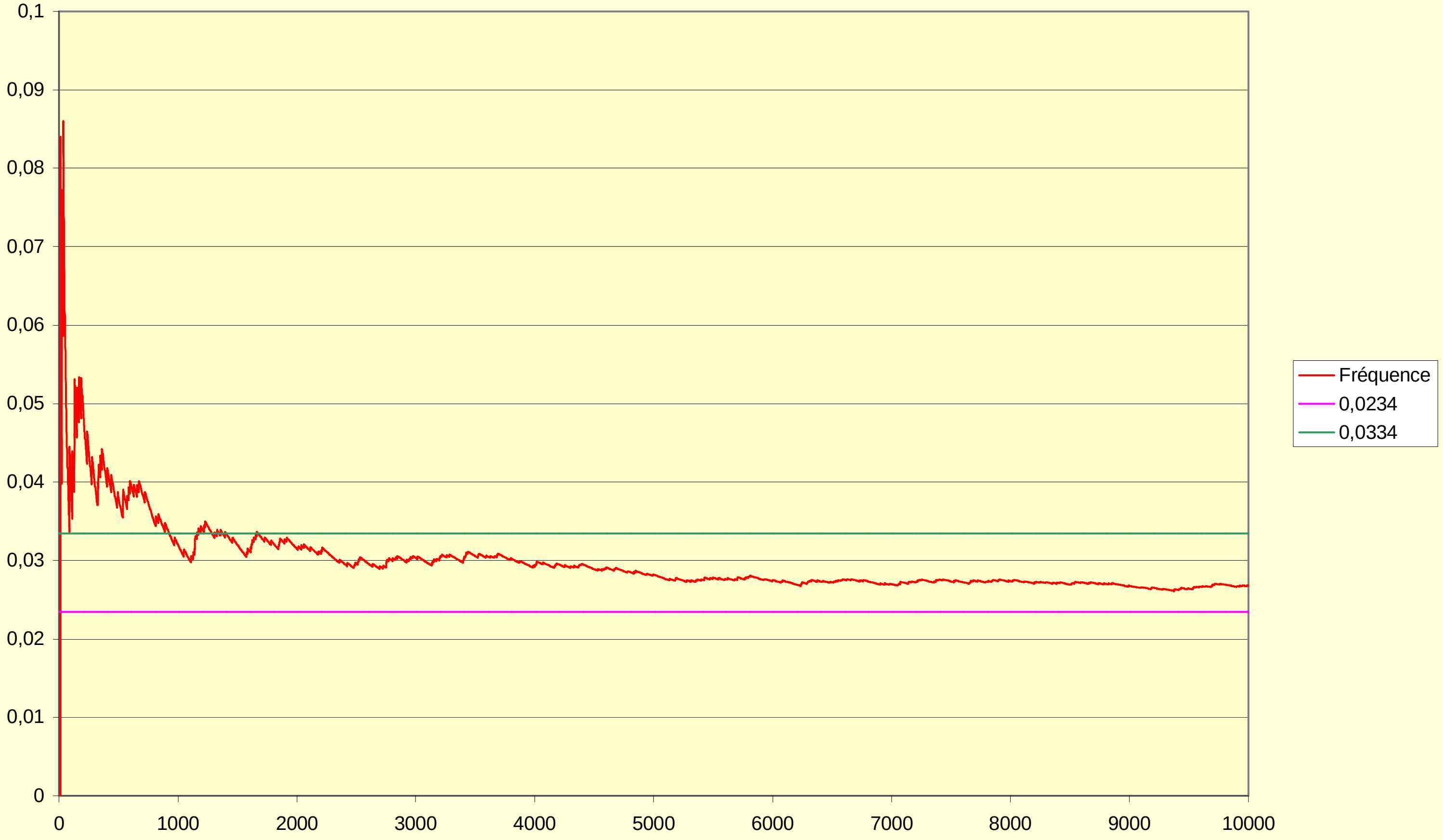
b) Fourchette d'échantillonnage au seuil de 95%

Illustration de la formule $$P\left(\left|F_n - p\right| < \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq 0,95$$

			Fréquence	0,028				Nbre de	
								fourchettes	952
98	99	100	Nbre de P	>60	F100-0,1	F100+0,1	F100	contenant 0,5	
0	0	1	46	0	0,36	0,56	0,46	1	
1	1	0	53	0	0,43	0,63	0,53	1	
1	0	0	50	0	0,4	0,6	0,5	1	
1	1	1	52	0	0,42	0,62	0,52	1	
0	1	0	47	0	0,37	0,57	0,47	1	
0	0	0	45	0	0,35	0,55	0,45	1	

5°) Stabilisation des fréquences (2ième niveau de simulation)

On crée une courbe représentant la fréquence d'apparition de l'événement E sur n série de 100 lancers en fonction de n.



On constate la stabilisation des fréquences autour d'une valeur proche de 0,028

Le dessous des cartes est la loi faible des grands nombres :

Pour tout $\varepsilon > 0$ $P\left(|F_n - p| > \varepsilon\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

<u>Problème</u> : On fixe un tuyau autour de p [p – 0.01 ; p + 0.01] .
Comment choisir n pour que la probabilité que le point de coordonnée (n ;Fn) reste dans le tuyau, soit supérieure à 0.95 ?

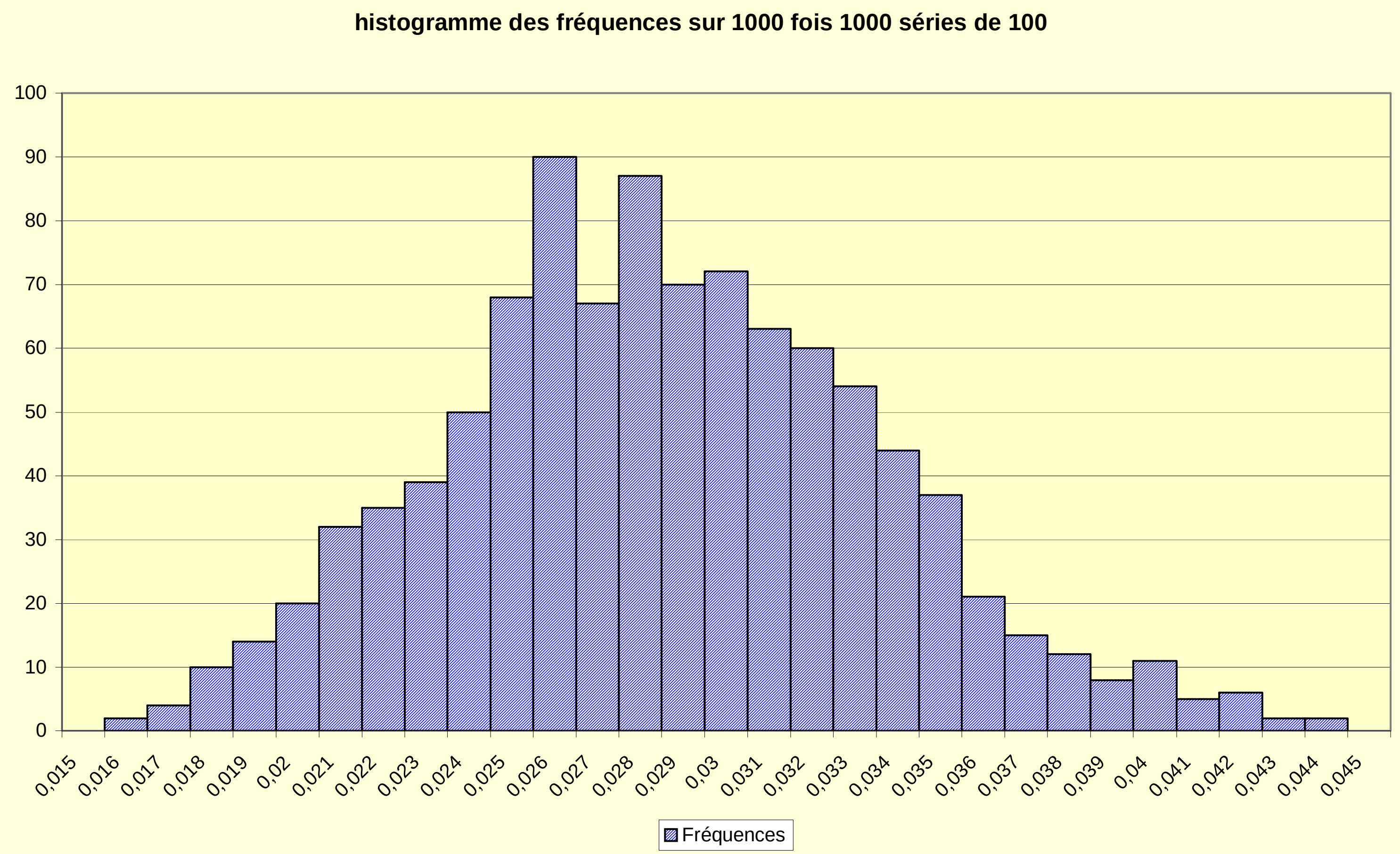
Solution : On sait que $P\left(|F_n - p| < \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq 0,95$

$$\text{Si } \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 0,01 \text{ on aura } P\left(|F_n - p| < 0,01\right) \geq P\left(|F_n - p| < \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq 0,95$$

Il suffit donc de choisir $\sqrt{n} \geq 100$ c’est à dire **n ?10000**

6°) Distribution des fréquences (3ième niveau de simulation)

On récupère dans un tableau 1000 fréquences de l’événement « obtenir 60 piles ou plus » obtenues par les élèves sur 1000 séries de 100 lancers.



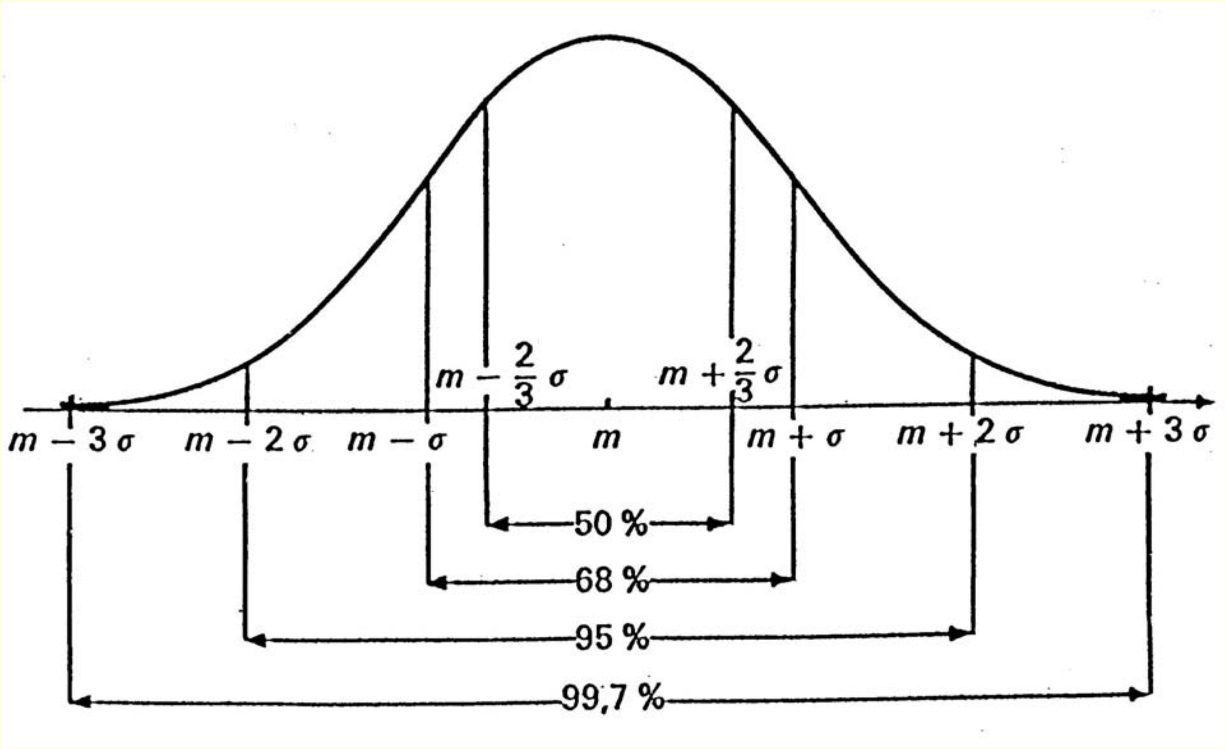
Retour au problème initial

Solution de tête

On approche la loi binomiale $\mathcal{B}(1000\,;\frac{1}{2})$ par la loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$

avec μ = 500 et $\sigma = \sqrt{1000\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}} = \sqrt{250}$ % 16 (un peu moins).

Donc 548 % μ+3σ (légèrement supérieur)



La probabilité que le nombre de Piles soit à l'extérieur de [μ-3σ ; μ+3σ] est de 3/1000 par raison de symétrie la probabilité qu'il soit supérieur à μ+3σ est de 1,5/1000.

Par le calcul

Approximation par la loi Normale

Les conditions d'approximation de la loi binomiale par la loi normale sont satisfaites à savoir n > 30 ; np > 5 ; nq > 5

$T = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$ suit approximativement la loi normale N(0 ; 1) ici $T = \frac{X - 500}{5\sqrt{10}}$

Alors $X \geq 548 \Leftrightarrow T \geq \frac{48}{5\sqrt{10}} \quad (\simeq 3{,}03578655)$

La fonction **LOI.NORMALE.STANDARD** d'EXCEL donne
1 - ϖ(3,03578655),= 0,0012

Utilisation directe de la loi binomiale

La fonction **LOI.BINOMIALE cumulée** d'EXCEL donne : 0,0013