Atelier : progressions sur un thème géométrique.

Animateur : Alain DIGER, IA-IPR, Académie d'Orléans Tours
Rapporteur : Dominique PETIT, chargé de mission, Académie Orléans Tours

Les textes institutionnels incitent à mettre en place une progression annuelle, et même pluriannuelle, « en spirale » pour enseigner les mathématiques. Dans une première partie, on tente de répondre à la problématique suivante : pourquoi et comment mettre en place une telle progression ? Dans une deuxième partie, on s'intéresse à une exemplification dans une progression en classe de sixième autour de la symétrie axiale.

Vers une progression en spirale

Quelques constats

Un professeur est amené à répondre à des questions ou à des nécessités qui s'imposent de manière récurrente dans sa pratique professionnelle :

- Les élèves ont beaucoup de difficultés à transférer les acquis obtenus sur un thème donné dans des situations relevant d'un autre thème d'étude. Leurs acquis semblent fragmentés.
- Et même, plus inquiétant, beaucoup d'élèves semblent faire table rase du travail effectué sur un thème dés que s'engage l'étude du thème suivant. Ils ne capitalisent pas les acquis successifs.
- Le professeur doit à un moment donné décider d'interrompre le travail sur un thème donné pour passer au thème suivant. Comment choisir ce moment compte tenu des acquisitions des élèves, nécessairement imparfaites sur le thème qu'on doit pourtant quitter ?
- « Finir le programme » est un souci légitime mais générateur de beaucoup de stress chez le professeur. Des tensions s'ensuivent souvent dans sa relation avec les élèves. Comment ne laisser de côté aucun thème important ? Comment ne pas négliger non plus les deux thèmes particuliers que sont les statistiques et la géométrie dans l'espace ?
- Quels thèmes doit-on aborder en début d'année sachant qu'en fin d'année on constate souvent que le travail le plus ancien s'est effacé des mémoires des élèves ? La question prend un tour particulier dans les classes à examen mais elle se pose dans toutes les classes.
- Quels thèmes doit-on aborder en fin d'année sachant qu'à ce moment la pression liée au temps est maximale et que l'expérience prouve que les élèves oublient systématiquement ces derniers travaux durant les vacances qui suivent ?

Une réponse institutionnelle

Quelques extraits de documents institutionnels permettent de donner des éléments de réponse. Dans l'introduction générale du programme pour le collège, on peut lire :
« L'ordre d'exposé des compétences, pour chaque domaine, ne correspond pas nécessairement à celui de leur apprentissage. D'autant plus que, dans la plupart des cas, ces compétences ne s'acquièrent ni isolément les unes des autres, ni en une seule fois. Pour prendre sens pour les élèves, les notions mathématiques et les compétences qui leur sont liées doivent être mises en évidence et travaillées dans des situations riches, à partir de problèmes à résoudre, avant d'être entraînées pour elles-mêmes. Il faut également prendre en compte le fait que **tout apprentissage se réalise dans la durée, dans des activités variées** et que **toute acquisition nouvelle doit être reprise, consolidée et enrichie. »**
A propos du cursus secondaire (donc du collège), la brochure d'accompagnement des programmes des classes terminales de la série scientifique et de la série sciences économiques précise ***:***
« L'enseignement mathématique, tant sur une année donnée que sur l'ensemble du cursus secondaire, relève d'une démarche « en spirale » : on revient régulièrement sur une notion déjà étudiée pour la

compléter, l'appliquer dans un nouveau contexte, l'insérer dans un cadre plus large… bref la faire vivre. »

Ainsi, une demande institutionnelle incite les professeurs à ne pas introduire une notion en une seule étape mais au contraire à répartir son apprentissage sur l'année scolaire. On peut constater qu'une progression en spirale répond en partie aux interrogations, exposées en introduction, qu'un professeur peut se poser. Dans le cadre d'une telle progression, l'apprentissage d'une notion est un chantier qui s'étale sur toute l'année scolaire et ainsi

- évite la fragmentation des savoirs,
- facilite la capitalisation des compétences dans de nouveaux contextes,
- permet au professeur un avancement régulier dans les apprentissages le dégageant des soucis « finir le programme » et du changement de chapitre puisque les différents réinvestissements de la notion lui donneront l'occasion de réagir face aux besoins de la classe.
- favorise un étalement des difficultés et évite l'accumulation de l'apprentissage d'une notion en début ou en fin d'année.

Quelques conseils pour construire une progression en spirale

Voici quelques pistes qui peuvent être utiles pour construire une progression en spirale. Pour plus de détails on peut se reporter au site de l'académie d'Orléans-Tours (http://www.ac-orleans-tours.fr/maths/prog_site/accueil_progressions.htm)

- Lire et prendre en compte les programmes officiels et leurs documents d'accompagnement
- Dégager les points forts
- Prendre en compte les niveaux antérieurs et suivants. Penser l'apprentissage sur le long terme
- Positionner le début du travail sur les points forts au premier trimestre
- Prévoir les réinvestissements sur les points forts
- Positionner le travail sur statistiques et sur la géométrie dans l'espace
- Prévoir les tests d'entrée dans les points forts et les dispositifs d'aide, de révision ou de différenciation afférents
- Organiser, équilibrer, relier, alterner
- Prendre en compte le manuel de la classe, rechercher les apports exploitables
- Baliser par quelques contrôles bilans, quelques activités fortes, quelques devoirs à la maison

Un exemple de progression en géométrie : la symétrie axiale en sixième

Il n'existe pas de progression en spirale « type » puisque la réactivité du professeur face aux difficultés des élèves la rend particulière à chaque classe. Cependant, l'exemple de progression qui suit tient compte du souci de réinvestissement des notions abordées tout au long de l'année scolaire.

Cet exemple ne concerne que la géométrie en classe de sixième et s'appuie sur la symétrie axiale. Ce travail se répartit en quatre temps :

1. Temps 1 : reprise de l'étude sur la géométrie.
2. Temps 2 : reprise de l'étude sur la symétrie axiale.
3. Temps 3 : axe de symétrie d'une figure.
4. Temps 4 : la symétrie axiale outil d'étude mathématique pour étudier des figures simples.

Ce fonctionnement structure toute la progression annuelle dans le domaine géométrique. Il prend en charge la formation au raisonnement, prend en compte les connaissances antérieures des élèves, intègre des moments de travail basés sur la résolution de problèmes, replace le travail sur vocabulaire et notations après le travail sur le sens et prend en charge le développement des capacités que les élèves ont à étudier *(démarche d'investigation, devoirs à la maison,…).*

Temps 1 : reprise de l'étude en géométrie

Ce premier temps permet de revisiter les notions antérieures sous un angle nouveau (*les figures géométriques sont constituées de points*) qui offre une nouvelle chance de comprendre à ceux qui n'avaient pas compris. Il présente aussi des connaissances nouvelles (*la médiatrice d'un segment*) pour répondre aux attentes de ceux qui avaient compris. Finalement, ce premier moment permet d'apporter une plus value à tous.

Cette première rencontre avec la géométrie de sixième se place dans le domaine perceptif, en appui sur la conception de la géométrie mise en place à l'école. Les résultats sont admis à la suite des observations faites sur des dessins, objets physiques à ce stade. Elle comprend des activités où le vocabulaire sera repris, où émergera la notion de médiatrice puis des situations permettant de réinvestir cette notion de médiatrice mais aussi de mettre en place des raisonnements.

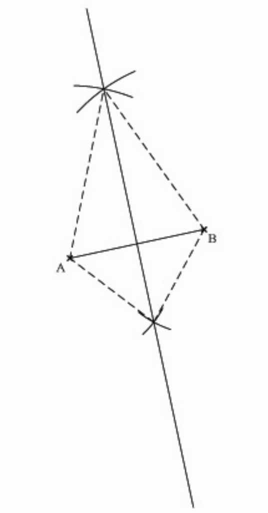
Activité 1 :
On donne deux points A et B distincts.
On demande aux élèves de placer un point aligné avec les points A et B. Puis un deuxième, un troisième, etc. On demande ensuite de colorier en vert **tous** les points alignés avec les points A et B.
Finalement, on institutionnalise :
Si A et B sont deux points distincts les points alignés avec A et B forment la droite passant par A et B. Cette droite est notée (AB).
Vocabulaire : distinct (synonyme : différent), contraire : confondus (l'un sur l'autre).

Activité 2 :
On donne un point A.
On demande aux élèves de placer un point situé à 5 cm du point A, puis un deuxième, un troisième, etc. On demande à nouveau de colorier en vert tous les points situés à 5 cm du point A.

On institutionnalise :
Les points situés à 5 cm d'un point A forment le cercle de centre A et de rayon 5 cm.
Vocabulaire : cercle, centre, rayon, diamètre.

Activité 3 :
On donne deux points A et B distincts.
On demande aux élèves de placer un point situé à égale distance des points A et B, puis un deuxième, un troisième, etc. Ici encore, on finira par demander de colorier en vert tous les points situés à égales distances des points A et B.

On institutionnalise :
Si A et B sont deux points distincts, les points situés à égales distances des points A et B forment une droite appelée médiatrice des points A et B (ou du segment AB).
La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire passant par le milieu de ce segment.
Vocabulaire : équidistant, médiatrice, milieu, extrémités.



Applications :
Exercices sur distances et équidistances.
Constructions :
médiatrice à l'aide du compas ou à l'aide de règle et équerre,
perpendiculaire à d passant par A,
parallèle à d passant par A.
Vocabulaire : cerf volant.

Question ouverte : un rectangle et deux cercles (voir annexe 1)

Ce premier chapitre se poursuit par une réorganisation des connaissances où l'on formalise les outils qui seront utilisés par la suite :
Définition : La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire passant par le milieu de ce segment.
Propriété : tout point de la médiatrice d'un segment est équidistant des extrémités de ce segment.
Propriété réciproque : tout point équidistant des extrémités d'un segment est situé sur la médiatrice de ce segment.
Propriétés sur parallèles et perpendiculaires.

Il se termine par un premier devoir à la maison (le trésor de l'île aux requins, voir annexe 2)

Temps 2 : reprise de l'étude sur la symétrie

Ce deuxième chapitre s'appuie sur les connaissances antérieures des élèves sur la symétrie axiale notamment l'approche expérimentale par pliage. Il effectue le lien entre symétrie axiale et médiatrice d'un segment en demeurant dans la géométrie perceptive. Mais on mathématise la situation et on aborde ainsi le début du raisonnement déductif par les propriétés de la symétrie axiale. On note le rôle particulier des points invariants.

Différentes activités permettent :
- de réactiver le pliage, de découvrir les liens entre médiatrice d'un segment et la symétrie axiale (voir annexe 3),
- de construire des symétriques de figures dans différentes situations notamment quand l'axe coupe la figure, de montrer l'intérêt dans ce cas du recours au calque qu'on retourne et de l'exploitation des points invariants.
- de construire des symétriques de figures sur papier pointé ou à main levée, d'en repérer les éventuelles erreurs afin d'assurer le sens et la conceptualisation sur la notion de symétrie axiale.
- de construire l'axe d'une symétrie en utilisant les points invariants, observer et noter le lien avec la médiatrice d'un segment, élaborer des méthodes de construction précise du symétrique d'un point (retour sur le cerf volant, annexe 4).
- de réaliser des constructions exactes précédées de constructions à main levée permettant aux élèves de s'appuyer sur leurs acquis antérieurs.
- d'utiliser les propriétés de la symétrie axiale, conservations et non conservations (observées) afin de donner du sens aux propriétés de conservation et de revenir sur des concepts fondamentaux (droite, angle…) et sur l'importance des points invariants.

Ces activités sont complétées par des exercices sollicitant les propriétés précédentes. Une interrogation rapide (symétriques à main levée) est intercalée permettant ainsi d'évaluer l'acquisition du sens. Une autre interrogation courte permet d'évaluer les compétences nécessaires pour effectuer des constructions exactes et pour utiliser les propriétés de la symétrie axiale.

Temps 3 : axe de symétrie d'une figure

Ce troisième temps est en grande partie nouveau pour les élèves notamment dans sa démarche qui, cette fois, aborde franchement le déductif.
On aborde la notion de figure invariante et d'axe de symétrie d'une figure (voir annexe 5 qui montre un document méritant d'être accompagné par une présentation utilisant un logiciel de géométrie dynamique).
On traite sur le plan expérimental des exemples (dont le segment, le cercle, la droite).
On traite sur le plan mathématique le cas de la bissectrice d'un angle (nouveau retour sur le cerf volant annexe 4).

Temps 4 : étude mathématique de figures

Ce dernier chapitre se place totalement dans le domaine de la géométrie déductive. Il introduit les figures du programme et permet de justifier les propriétés du triangle isocèle, du triangle équilatéral et du losange (voir annexe 6). Le cas du rectangle, bien que plus délicat, mérite également d'être traité. Enfin le carré apparaîtra comme un rectangle et un losange particulier.

Conclusion

Sur les progressions :

Compte tenu des textes institutionnels actuels et des questions qui se posent au professeur dans sa pratique de classe, il est en général aisé d’obtenir l’adhésion des professeurs au principe des progressions spiralées. Le passage à la réalisation s’avère souvent plus délicat, probablement parce qu’il est conçu d’une façon trop rigide, parfois comme le passage d’un dogme à un autre.
Très concrètement, l’évolution peut prendre appui sur une progression séquentielle existante et sur le repérage d’un thème essentiel dont l’importance est telle qu’une analyse immédiate montre que les objectifs d’apprentissage ne peuvent être atteints d’un coup. C’est le cas dans l’exemple choisi ici : on ne peut attendre d’un élève de sixième qu’il entre d’un coup dans la démarche mathématique consistant à étudier des figures à l’aide de la symétrie axiale. La progression proposée en quatre temps permet pourtant d’atteindre cet objectif.
L’évaluation de certaines compétences du programme ne peut pas non plus être raisonnablement envisagée trop tôt dans l’année : des objectifs du programme peuvent être accessibles en fin d’année sans l’être au cours des deux premiers trimestres.

Sur le raisonnement et la démonstration en géométrie :

Beaucoup de professeurs rencontrent des difficultés pour faire mémoriser les énoncés de géométrie du programme par leurs élèves. Ces énoncés sont pourtant nombreux dés les classes de sixième et de cinquième. Au-delà de la sollicitation de la mémoire, il est évident que se pose ici la question du sens et du statut de ces énoncés. Pour comprendre les raisons d’exister de ces énoncés dans leur forme spécifique aux mathématiques, il faut les utiliser. Le cadre de cette utilisation ne peut être que la démonstration ou plus largement le raisonnement (dans des formes éventuellement moins abouties, pour réaliser une figure…).
En sixième ou en cinquième, se pose donc le dilemme de savoir comment engager l’étude : on ne peut raisonner sans un minimum d’énoncés, on ne peut élaborer des énoncés efficacement que quand on a compris leur raison d’être et donc déjà entrepris de raisonner. On rencontre fréquemment des professeurs en difficulté dans leur pratique parce qu’ils privilégient excessivement un de ces deux aspects aux dépends de l’autre.
Se pose aussi la question de la nature de ces énoncés et de leur rédaction : propriétés et propriétés réciproques énoncées séparément mais définitions qui sont par nature des équivalences. Enfin, beaucoup d’objets mathématiques ne peuvent être définis dans les classes. C’est le cas notamment de la droite en sixième par exemple dont on rencontre pourtant fréquemment des définitions fournies aux élèves. Elles sont évidemment rarement acceptables mathématiquement et toujours dénuées d’intérêt car sans application possible dans un raisonnement mathématique.

ANNEXE 1

Quel nombre maximum de points d'intersection peut-on obtenir entre un rectangle et 2 cercles ?

Phase 1 : appropriation du problème

Le professeur présente le problème : chaque élève trace un cercle et deux rectangles puis compte les points d'intersection entre le rectangle et chaque cercle ainsi que les points d'intersection entre les 2 cercles. Le cas où les 2 cercles seraient confondus est exclu.

L'élève ayant obtenu le plus grand nombre de points d'intersection présente sa solution. Ce record provisoire est inscrit au tableau et, à ce moment là seulement, la question principale est posée : il s'agit maintenant d'améliorer autant que possible ce résultat.

Phase 2 : travaux de groupes

Placés par groupes de 3 ou 4, les élèves doivent chercher à améliorer le record précédent. A chaque fois qu'un groupe obtient une amélioration du record il présente sa solution à la classe.

Une question surgit inévitablement : « Quand va-t-on s'arrêter ? »

Le professeur donne alors la dernière consigne :

« Le groupe déclaré vainqueur sera celui qui aura tracé une figure sur laquelle il est capable d'apporter la preuve que son record ne peut plus être battu par personne. »

Par la suite, selon les réactions des élèves il devra juger de l'intérêt ou de la nécessité qu'il y a à apporter des aides.

Phase 3 : conclusion

Les élèves reprennent un travail individuel et rédigent la preuve sous la conduite du professeur. Il est important de mettre en évidence à ce moment que c'est un raisonnement qui a permis d'apporter la réponse finale à la question posée.

Remarques sur le fonctionnement de l'activité :

1) Il est nécessaire d'avoir auparavant observé qu'un cercle et une droite peuvent avoir 2 , 1 ou aucun points d'intersection ; qu'il en va de même pour 2 cercles.

2) Le nombre théorique maximum de points d'intersection qu'on peut obtenir est donc de :

$$4 \times 2 + 4 \times 2 + 2 = 18$$

Une figure bien construite constituera évidemment une preuve suffisante ici pour assurer que ce maximum est atteint.

3) La réalisation de cette figure est fortement problématique pour les élèves en début de 6ème. En effet sa réalisation pratique impose que le rectangle choisi ait une forme qui se rapproche du carré. Or ce n'est pas la forme prototypique du rectangle que les élèves ont en tête. Comme le tracé du rectangle est le premier tracé qu'ils effectuent pour construire la figure, des ajustements successifs seront nécessaires pour améliorer le résultat obtenu. Ceci donne tout son sens à la phase 2 de l'activité.

4) Une question supplémentaire émergera en phase 2 ou 3 : a-t-on le droit d'utiliser un carré ? Cette une opportunité à saisir pour retrouver ou aborder la question des figures particulières.

5) Le moteur de l'activité est en début de phase 2 une compétition entre les groupes. Elle évolue ensuite davantage vers un défi lorsqu'il s'agit de fournir une preuve.

6) La preuve attendue a une grande légitimité dans l'activité : c'est une preuve pour convaincre. Tous les élèves en ressentent la nécessité et en acceptent le verdict lorsqu'elle est fournie.

7) C'est aussi une activité emblématique de ce qui peut-être fait pour faire évoluer les élèves du dessin vers le raisonnement. Ceci constitue l'objectif principal de l'activité. D'autres objectifs sont les axiomes d'incidences entre droites et cercles, une réflexion sur la nature du rectangle et le fait que le carré est un rectangle particulier.

ANNEXE 2

Devoir à la maison : le trésor de l'île aux Requins

Il y a très longtemps, des corsaires ont caché sur cette île deux trésors :
Un premier coffre contenant 120 diamants et un deuxième coffre contenant 3500 pièces d'or.
Julie a trouvé un document qui doit lui permettre de trouver les emplacements de ces eux trésors.
Aide la à utiliser ces renseignements :

1) a) Une première bouteille est enterrée à 1,6 km du phare et à égales distances du ponton et du gros rocher.
Place ce point B sur la carte.
b) Dans cette bouteille se trouve le renseignement suivant :
« Le coffre contenant les pièces d'or est enterré à 1 km du gros rocher et à 0,5 km de la tour en ruines. »
Place ce point C sur la carte.

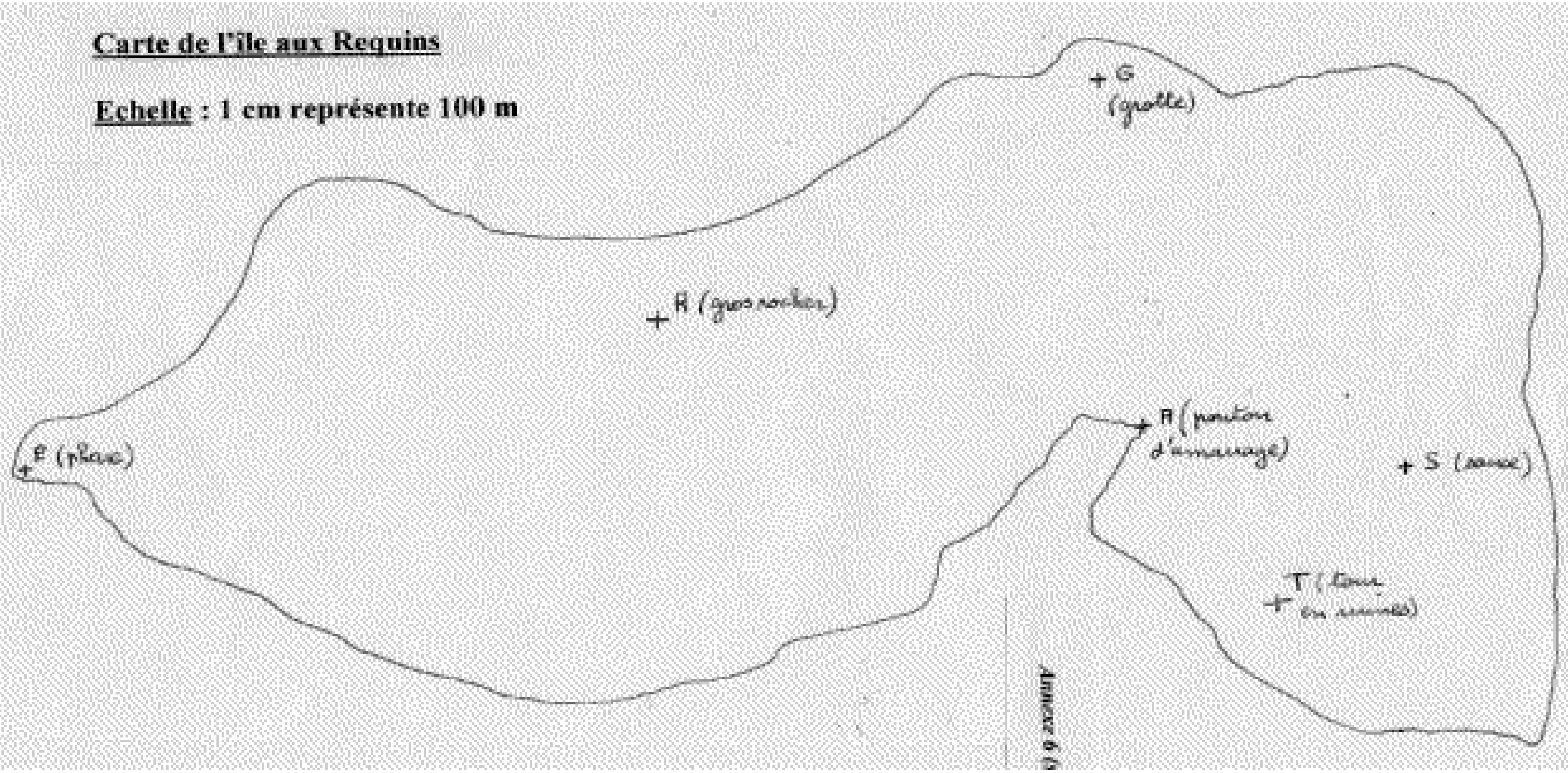
2) a) Une deuxième bouteille est enterrée sur l'île. Cette bouteille est alignée avec la grotte et la source d'une part ; le ponton d'amarrage et le phare d'autre part.
Place ce point B' sur la carte.
b) Dans cette bouteille se trouve le renseignement suivant :
« Le coffre contenant les diamants est à 1 km du gros rocher et à 0,5 km de la tour, mais il n'est pas avec le coffre contenant les pièces d'or. »
Où se trouve le coffre contenant les diamants ? Place ce point C' sur la carte.

3) Donne un programme de construction pour
a) Le point B
b) Le point B'
c) Les points C et C' (un seul programme pour les 2 points)

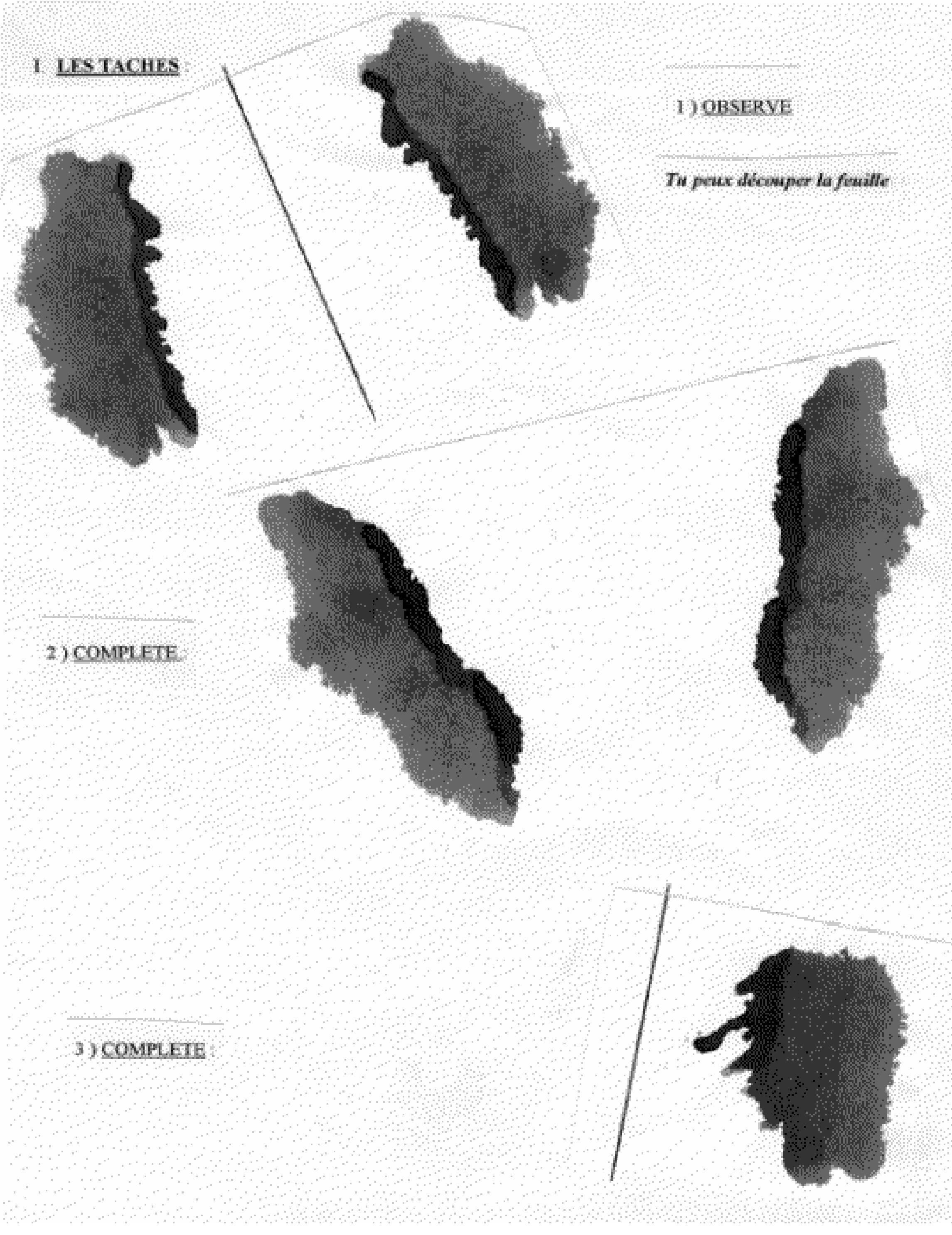
Page suivante :

Carte de l'île aux Requins

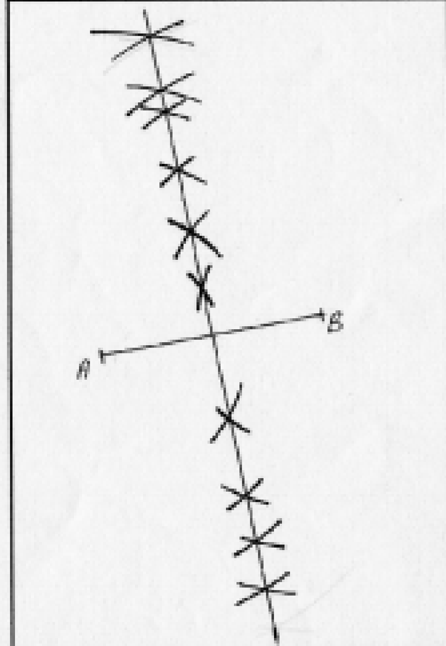
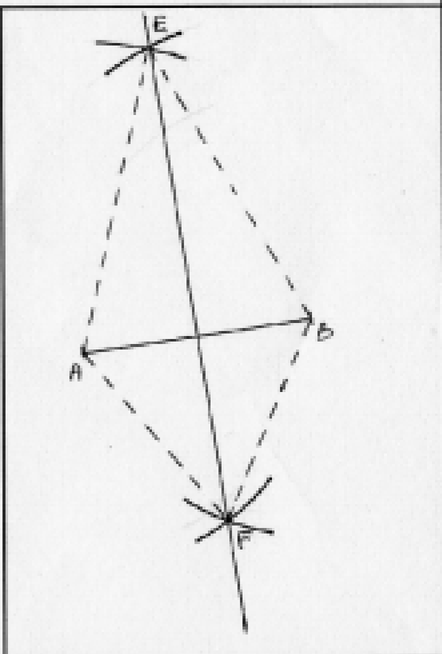
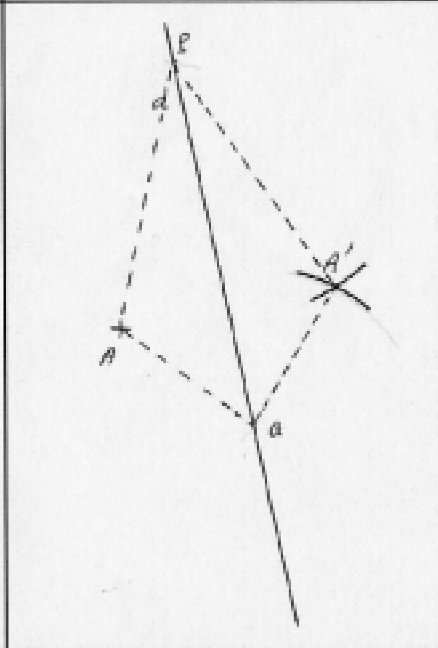
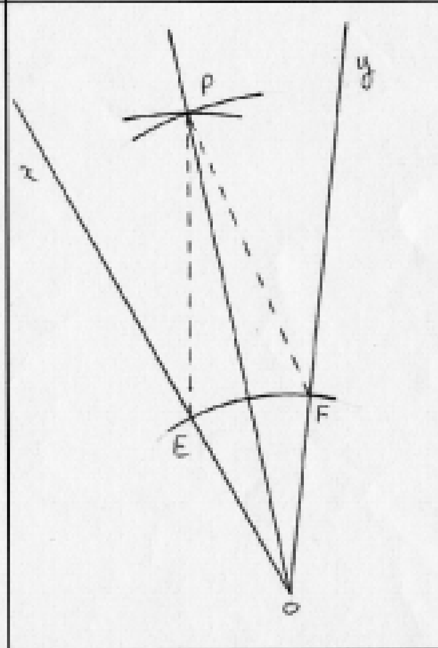
<u>Echelle</u> : 1 cm représente 100 m


Carte de l'île aux Requins
Echelle : 1 cm représente 100 m
G (grotte)
R (gros rocher)
P (plage)
A (ponton d'amarrage)
S (source)
T (tour en ruines)

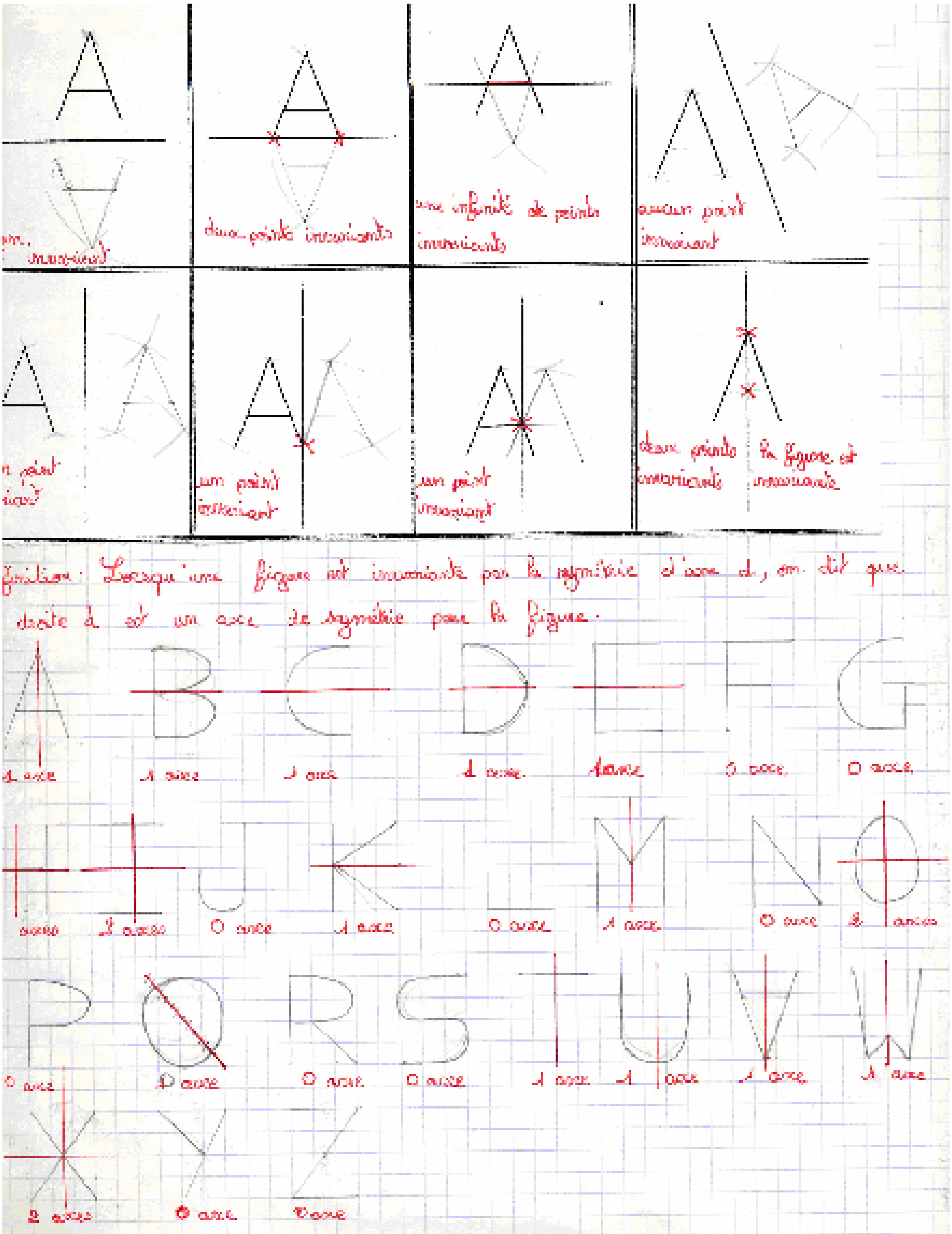
ANNEXE 3


1 LES TACHES
1) OBSERVE
Tu peux découper la feuille
2) COMPLETE
3) COMPLETE

ANNEXE 4:

Construction 2.1		Construction 4.1	Construction 6.1
Temps 1	Temps 2		
			
Les points équidistants de 2 points distincts A et B forment une droite appelée médiatrice du segment AB (ou des 2 points A et B).	Si une droite passe par 2 points équidistants des extrémités d'un segment alors c'est la médiatrice de ce segment.	Deux points sont symétriques par rapport à une droite lorsque cette droite est la médiatrice de ces 2 points.	La bissectrice d'un angle est l'axe de symétrie de cet angle.

ANNEXE 5 :


deux points invariants
une infinité de points invariants
aucun point invariant
un point invariant
un point invariant
deux points invariants
la figure est invariante
Lorsqu'une figure est invariante par la symétrie d'axe d, on dit que la droite d est un axe de symétrie pour la figure.
1 axe
1 axe
1 axe
1 axe
1 axe
0 axe
0 axe
2 axes
0 axe
1 axe
0 axe
1 axe
0 axe
2 axes
0 axe
1 axe
0 axe
0 axe
1 axe
1 axe
1 axe
1 axe
2 axes
0 axe
0 axe

ANNEXE 6

1) LE TRIANGLE ISOCÈLE :

a) Construis un triangle ABC isocèle en A :

> **Définition** :Un triangle isocèle est un triangle ayant ___________________________________
> [BC] s'appelle ___________________________
> A s'appelle _____________________________
> B et C s'appellent ________________________

b) On nomme d la médiatrice de [BC]. Sans tracer d, explique pourquoi la droite d passe par le point A.

____
____
____

On nomme M le milieu de [BC]. Sans tracer d, explique pourquoi la droite d passe par le point M.

____
____

Place le point M. Trouve (sans utiliser de nouvelle lettre) un autre nom de la droite d :___ Trace cette droite.

c) Le symétrique de A par rapport à la droite d est : ____ . Explique pourquoi.

____

Le symétrique de B par rapport à la droite d est : ____ . Explique pourquoi

____

Le symétrique de C par rapport à la droite d est : ____ . Explique pourquoi

____

Le symétrique du triangle ABC par rapport à la droite d est : _______________________________________

La droite d est ____

d) Le symétrique de BAM par rapport à la droite d est : ______

Que peux-tu en déduire pour les angles BAM et ______ ? Pourquoi ?

____
____

> La droite d est un ________________________________pour le triangle. Mais c'est aussi la
> ________________________de la base et la ______________________de l'angle principal.

e) Le symétrique de ABC par rapport à la droite d est : _______

Que peux-tu en déduire pour les angles ABC et ______ ? Pourquoi ?

____
____

> Dans un triangle isocèle les ________________________________ sont égaux.

2) LE TRIANGLE ÉQUILATÉRAL :

Construis un triangle équilatéral EFG

> **Définition** : Un triangle équilatéral est un triangle ayant _____________________________________
>
> Remarque : Le triangle EFG est isocèle en __ mais aussi isocèle en __ et isocèle en __.
> Conséquence : Un triangle équilatéral est un triangle __________ particulier.

EFG est isocèle en E donc la ________________ de [FG] est un axe de symétrie et ______ = _____ .
EFG est isocèle en F donc la ________________ de [GE] est un axe de symétrie et ______ = _____ .
EFG est isocèle en G donc la ________________ de [EF] est un axe de symétrie et ______ = _____ .

> Le triangle équilatéral a ___________________ de symétrie.
> Il a aussi _________________ égaux.(tu verras en 5è pourquoi chacun mesure ___°)