Décimaux relatifs en classe de 5^{e}

P. Arzoumanian[2] M. Bovani[1] A. Diger[2] D. Petit[2]

Décembre 2004

Le présent document reprend la présentation qui a été faite lors de l'atelier. Nous avons ajouté en italique quelques commentaires qui reprennent en partie le contenu des débats. Cette présentation est d'ailleurs fortement inspirée des rélfexions menées dans l'académie d'Orléans-Tours, tant sur l'enseignement de l'algèbre que sur la maîtrise des progressions. On pourra consulter à ce sujet le site pédagogique de cette académie.

1 Introduction des décimaux relatifs

On se propose ici d'analyser ce qui est attendu par le futur programme de 5^{e} quant à l'introduction des décimaux relatifs. Il s'agit bien entendu d'une interprétation, et cette interprétation n'est probablement pas unique. Il est néanmoins probable que l'idée de « rendre la soustraction toujours possible » impose des contraintes incontournables.

1.1 Étendre la soustraction

Les futurs programmes proposent de « rendre la soustraction toujours possible ».

- Il s'agit d'une situation *interne* aux mathématiques.
- On dispose de l'ensemble $\mathscr{D}$ des décimaux naturels, muni d'une opération, l'addition, associative, commutative et admettant 0 pour élément neutre (en termes savants $(\mathscr{D}, +)$ est un *monoïde commutatif*).
- On veut compléter cet ensemble $\mathscr{D}$ en un ensemble $\mathbb{D}$ sur lequel l'addition se prolonge de telle façon que $(\mathbb{D}, +)$ soit un groupe (existence d'un opposé, ou soustraction partout définie).

On peut alors adopter différents points de vue :

- La construction aujourd'hui classique par passage au quotient. *Le principe de cette contruction est rappelé dans l'annexe 4.1.*
- L'utilisation du principe de permanence, dont une version simplifiée peut se résumer à *Les règles de calcul connues dans $\mathscr{D}$ doivent continuer à s'appliquer dans $\mathbb{D}$.*

1.2 En classe de cinquième

Ce qui est présenté ici a été à l'origine d'un débat assez long. Il doit être clair qu'il s'agit d'une situation magistrale (autrement dit la mise en œuvre est à la charge du professeur), qui nécessite que la nécessité de rendre la soustraction toujours possible ait été correctement problématisée auparavant. On trouvera dans l'annexe 4.3 deux programes de calcul qui peuvent être la base d'une activité en ce sens et on notera d'ailleurs que l'usage de la calculatrice ou du tableur permet de rendre naturelle la notation $0 - 7{,}1 = -7{,}1$ *(cf. ci-dessous).*

D'autrepart, le type de raisonnements menés ici suppose qu'un certain nombre de prérequis soient installés dans la classe. Ces prérequis concernent l'usage de la lettre comme outil de preuve (on pourra consulter à ce sujet le rapport d'étape de la CREM sur le calcul), la caractérisation de la différence $a - b$ comme étant le nombre qui ajouté à b donne a, et le mécanisme de substitution. On trouvera dans l'annexe 4.2 quelques pistes permettant de travailler ces prérequis. La mise en œuvre de ce qui est proposé ici suppose donc des choix qui auront une incidence forte sur la progression.

Que peut-on dire en classe de 5^e^ de la différence $3{,}7 - 10{,}8$?

Si l'on s'impose que les règles de calcul connues dans $\mathscr{D}$ doivent continuer à s'appliquer on peut écrire :

Posons	$3{,}7 - 10{,}8 = d$	*Usage de la lettre*
alors	$d + 10{,}8 = 3{,}7$	*Différence*
et	$d + 10{,}8 - 3{,}7 = 3{,}7 - 3{,}7$	*Substitution*
soit	$d + 7{,}1 = 0$	
finalement	$d = 0 - 7{,}1$	*Différence*

À ce stade on remarque que :
- Savoir calculer $3{,}7 - 10{,}8$ se ramène à savoir calculer $0 - 7{,}1$.
- Notre problème se ramène au calcul d'une différence du type $0 - x, x \in \mathscr{D}$.

On décide alors de noter

$$d = -7{,}1\ .$$

1.3 Remarques

- Même si les raisonnements proposés sont relativement simples, ils restent à la charge du professeur : il s'agit clairement d'une situation magistrale.
- La situation de départ doit être problématisée (programme de calcul).
- Un certain nombre de prérequis apparaissent.
- On peut éventuellement formaliser un peu plus en énonçant : *pour deux décimaux naturels a et b tels que $a < b$, la différence entre a et b est égale à la différence entre* 0 *et $b - a$.*

  On notera en tout cas que l'idée de pouvoir ramener toute différence à une différence à zéro est très forte puisque c'est elle qui sous-tend la définition des classes d'équivalence dans la construction de $\mathbb{D}$ par passage au quotient (cf. annexe 4.1).
- Quelques gammes d'exercices concernant le calcul de la différence de deux décimaux naturels quelconques sont d'ores et déjà possibles.
- Le travail n'est évidemment pas terminé : nous disposons maintenant de l'ensemble $\mathbb{D}$ des décimaux relatifs, il reste à étendre à cet ensemble les opérations de $\mathscr{D}$, à définir l'opposé, à introduire la représentation des décimaux relatifs sur un axe gradué, à aborder au moins succinctement l'ordre dans $\mathbb{D}$.

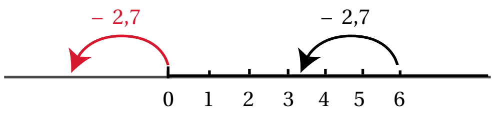
2 Fin de la construction

Ce qui est présenté dans cette section utilise les mêmes idées que ce qui précède. On notera que le fait de disposer d'une interprétation graphique des opérations permet de mener un travail de conjec-

ture sur les règles qui régissent l'addition et la soustraction dans $\mathbb{D}$. Dans ce contexte la construction de l'addition telle qu'elle est présentée peut servir de validation de cette conjecture…

2.1 Représentation et distance à zéro

1. On sait interpréter sur un demi axe gradué la soustraction de 2,7 (par exemple) à un autre décimal naturel comme un déplacement d'amplitude 2,7 vers la gauche.
2. On en déduit (principe de permanence) le placement de $-2{,}7$ $(0-2{,}7)$ et la représentation des décimaux relatifs par un axe.



3. On définit la distance à zéro.

2.2 Signe et opposé

1. On définit le signe d'un décimal relatif non nul et l'on introduit les notations $(+4)$ et (-4) comme des alternatives parfois utiles.
2. On convient de dire que deux nombres comme 4 et -4 sont opposés (ils ont la même distance à zéro et des signes différents). On dira aussi que -4 (par exemple) est l'opposé de 4, et que 4 est l'opposé de -4, et que zéro est son propre opposé.
3. On montre que si deux nombres sont opposés leur somme est nulle.

	ou	
$0-4=-4$	$0-(+4)=(-4)$	
$-4+4=0$	$(-4)+(+4)=0$	différence
$4+(-4)=0$	$(+4)+(-4)=0$	commutativité

2.3 Construction de l'addition dans $\mathbb{D}$

$s=(-8)+(+12)$	$s=(-8)+(+5)$	
$(+8)+s=(+8)+(-8)+(+12)$	$(+8)+s=(+8)+(-8)+(+5)$	(substitution)
$(+8)+s=(+12)$	$(+8)+s=(+5)$	
$s=(+12)-(+8)$	$s=(+5)-(+8)$	(différence)
$s=(+4)$	$s=(-3)$	

$s=(-8)+(-5)$	
$(+5)+(+8)+s=(+5)+(+8)+(-8)+(-5)$	(substitution)
$(+13)+s=0$	
$s=(-13)$	(différence ou opposé)
$s=-13$	

3 Institutionnalisation

3.1 Addition dans $\mathbb{D}$ (institutionnalisation)

On formule une règle d'action.

- *La somme de deux nombres de même signe a :*
  - *le même signe que ces deux nombres ;*
  - *une distance à* 0 *égale à la somme des distances à* 0 *de ces deux nombres.*
- *La somme de deux nombres de signes différents a :*
  - *le même signe que celui des deux nombres qui a la plus grande distance à* 0 *;*
  - *une distance à* 0 *égale à la différence des distances à* 0 *de ces deux nombres.*

Remarque : il resterait mathématiquement à vérifier que l'opération ainsi construite répond bien aux contraintes posées *a priori*. Cette vérification est didactiquement difficile à envisager.

3.2 Opposé (institutionnalisation)

On donne une définition.

Définition : *Deux nombres non nuls sont opposés s'ils ont la même distance à zéro et des signes différents.*

Une notation : l'opposé de x est noté $\text{opp}(x)$. Par exemple $\text{opp}(-4) = 4$ et $\text{opp}(0) = 0$.

Une propriété et sa réciproque.

Propriété : *La somme de deux nombres opposés est nulle.*

Réciproque : *Si la somme de deux nombres est nulle, alors ces deux nombres sont opposés.*

3.3 Soustraction dans $\mathbb{D}$

Soient a et b deux décimaux relatifs. Posons

$$d = a - b$$

alors

$$\begin{aligned}
&d + b = a \\
&d + b + \text{opp}(b) = a + \text{opp}(b) \\
&d + 0 = a + \text{opp}(b) \\
&d = a + \text{opp}(b)
\end{aligned}$$

et finalement

$$a - b = a + \text{opp}(b)$$

On peut alors insister sur le triple statut du signe $-$: signe d'un nombre, opposé d'un nombre, soustraction.

Cela permet de voir $7-11$ comme la somme de 7 et de -11 ou comme la différence de 7 et 11. et justifie des calculs comme

$$3{,}2 - 7{,}7 + 11{,}7 - 0{,}2 = 3{,}2 - 0{,}2 + 11{,}7 - 7{,}7 = 3 - 4 = -1\,.$$

4 Annexes

4.1 Une construction de $\mathbb{D}$

- Dans $\mathscr{D} \times \mathscr{D}$ on définit une addition par $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$.
- On définit une relation d'équivalence $\mathscr{R}$ par

$$(x, y)\mathscr{R}(x', y') \iff x + y' = x' + y\,.$$

- On montre que $\mathscr{R}$ est compatible avec l'addition, qui passe ainsi au quotient.
- On montre que le quotient $\mathbb{D}$ est un groupe abélien.
- En particulier

$$\widetilde{(x, y)} = \begin{cases} \widetilde{(x-y, 0)} & \text{si } x \geqslant y \\ \widetilde{(0, y-x)} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\widetilde{(x, y)} + \widetilde{(y, x)} = \widetilde{(0, 0)}$$

- On plonge $\mathscr{D}$ dans $\mathbb{D}$ grâce au morphisme injectif de monoïdes ϕ :

$$\phi : \mathscr{D} \to \mathbb{D}; x \mapsto \widetilde{(x, 0)}\,.$$

4.2 Prérequis

Prérequis : Usage de la lettre comme outils de preuve

Les deux grands objectifs sont :

- Organiser un moment de première rencontre avec la lettre en tant que nombre généralisé.
- Introduire le calcul littéral comme un élément indispensable à l'élaboration de certaines preuves.

Ce qui est proposé ici consiste à prouver que le programme 2 renvoie systématiquement le nombre donné en entrée. Cette preuve nécessite le recours à la lettre, alors que dans le cas du programme 1, pour lequel la propriété en question n'est pas universelle (loin de là !), un contre exemple suffit. Il est bien entendu nécessaire que les élèves disposent de règles de débat. En particulier la valeur de vérité d'un énoncé mathématique doit être une notion suffisamment claire pour eux dès le début de l'activité.

« Fais fonctionner chacun des deux programmes de calcul ci-dessous en choisissant le nombre 1, puis le nombre 2, puis le nombre 3, puis le nombre 4. »

1. Observe les résultats obtenus.
2. Quelle propriété générale peut-on conjecturer ?
3. Cette conjecture est-elle vraie ou fausse ?
4. Prouve le.

Programme 1

1. Choisir un nombre
2. Multiplier ce nombre par lui-même

3. Ajouter 35
4. Soustraire le décuple du nombre choisi
5. Multiplier par le nombre choisi
6. Multiplier par le nombre choisi
7. Ajouter 24
8. Soustraire le produit de 49 par le nombre choisi

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + x$$

Programme 2

1. Choisir un nombre
2. Le multiplier par 0,25
3. Ajouter 0,5
4. Multiplier par 4
5. Soustraire 2

$$\begin{aligned} f(x) &= (x \times 0{,}25 + 0{,}5) \times 4 - 2 \\ &= x \end{aligned}$$

Prérequis : caractérisation de la différence

Le calcul mental permet de travailler dans ce sens

$$\begin{array}{cc} 27 + x = 42 & x = ? \\ 200 - y = 51 & y = ? \\ z - 12 = 68 & z = ? \\ \text{etc.} & \end{array}$$

Prérequis : substitution

Voici quelques exemples d'exercices :

$$\begin{aligned} \text{Si } a = b + 3 \text{alors} a + 2 &= b + \dots \\ a + 6 &= b + \dots \\ a - 3 &= b + \dots \end{aligned}$$

Et en utilisant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition :

$$\text{Si } 15(a+b) = 525 \text{ et } 15a = 285 \text{ alors } 15b = \dots$$

4.3 Problématiser la situation de départ

On peut par exemple travailler avec un progamme de calcul qui applique $\mathscr{D}$ dans $\mathscr{D}$, mais en passant éventuellement dans $\mathbb{D}$.

Programme 1

1. Choisir un nombre ;
2. lui retrancher 5,927 ;
3. ajouter au résultat le double de la somme de 3,344 et du nombre choisi.

Programme 2

1. Choisir un nombre ;
2. le multiplier par 3 ;
3. ajouter 0,763 au résultat obtenu.

Les deux programmes sont équivalents dans $\mathbb{D}$, mais le premier ne fonctionne pas toujours dans $\mathscr{D}$.

La calculatrice ou le tableur permettent de faire apparaître des décimaux négatifs.