

Nombres, calculs et proportionnalité à l'articulation école - collège

André PRESSIAT

Maître de Conférences

de mathématiques à l'IUFM d'Orléans-Tours

DIDIREM - INRP

Cycle 3

Fractions

“ Une toute première approche des fractions est entreprise, dans le but d’aider à la compréhension des nombres décimaux. ”

Devrait être acquis
(Consolidation, utilisation) :
“ Nommer les fractions en utilisant le vocabulaire : demi, tiers, quart, dixième, centième ... ”

Sixième

Fractions et quotients

“ La notion de quotient occupe une place centrale en sixième, sous ses différentes significations : quotient euclidien, quotient décimal, quotient fractionnaire. ”

En construction : fractions et mesures de grandeurs

“Utiliser, dans des cas simples, des fractions ou des sommes d’entiers et de fractions pour *coder des mesures de longueurs ou d’aires*, une unité étant choisie ...

... ou pour *construire* un segment (ou une surface) de longueur (ou d’aire) donnée. ”.

Compétences :

Reconnaître parmi plusieurs écritures, dont des fractions, celle(s) qui exprime(nt) soit la mesure de la longueur d’un segment donné (l’unité de longueur étant fixée), soit la mesure de l’aire d’une surface donnée (l’unité d’aire étant fixée).

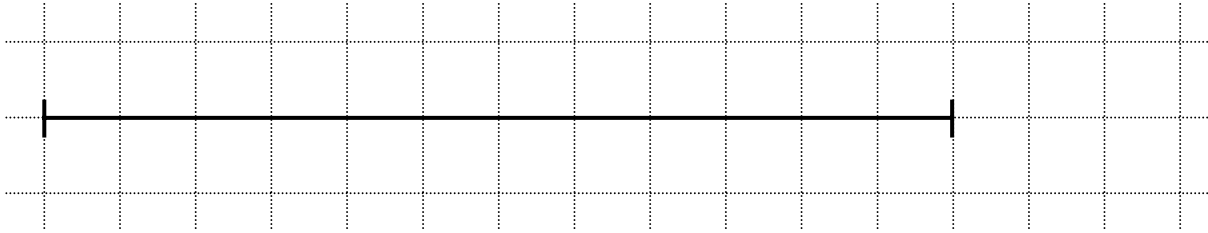
Commentaires :

« Il est important que la signification de “7 fois le tiers de l’unité ou 7 fois $\frac{1}{3}$ ” soit travaillée à l’école primaire. Le “dénominateur” nomme le type de partage de l’unité (en parts égales) alors que le “numérateur” précise le nombre de parts qui sont reportées. »

« Les élèves ont l’occasion de rencontrer des entiers sous forme fractionnaire, à partir d’égalités comme : $\frac{9}{3} = 3$ qui peuvent être justifiées : $\frac{9}{3}$, c’est “9 tiers de l’unité ou 3 fois 3 tiers de l’unité, donc 3 unités”, ce qui peut être illustré à l’aide de segments.

Résultats de l'évaluation nationale 2004 en 6^e

Voici un segment :



a) Construis un segment dont la longueur est $\frac{1}{4}$ de la longueur du segment donné.



Résultats (échantillon national représentatif)

| | |
|--------------------------------|--------|
| Code 1 | 54,9% |
| Code 6 (segment de 4 carreaux) | 21,5 % |
| Code 9 | 20,6 % |
| Code 0 | 3 % |

b) Construis un segment dont la longueur est $\frac{1}{6}$ de la longueur du segment donné.



Résultats (échantillon national représentatif)

| | |
|--------------------------------|--------|
| Code 1 | 41,9% |
| Code 6 (segment de 6 carreaux) | 25,8 % |
| Code 9 | 26,0 % |
| Code 0 | 6,3 % |

c) Construis un segment dont la longueur est $\frac{5}{4}$ de la longueur du segment donné.



Résultats (échantillon national représentatif)

| | |
|-------------------------------------|--------|
| Code 1 | 34,6% |
| Code 6 (segment de 4 ou 5 carreaux) | 12,7 % |
| Code 9 | 36,2 % |
| Code 0 | 16,5 % |

Importance de l'outil "guide-âne" pour partager un segment en n parties égales (dessiné dans le document d'application du cycle 3)

Faire manipuler **réellement** aux élèves de tels réseaux de parallèles équidistantes.

Voir fichier Cabri II plus, ci-joint.

En construction :

“ Encadrer une fraction simple par deux entiers consécutifs. ”

“ Ecrire une fraction sous forme de la somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1”.

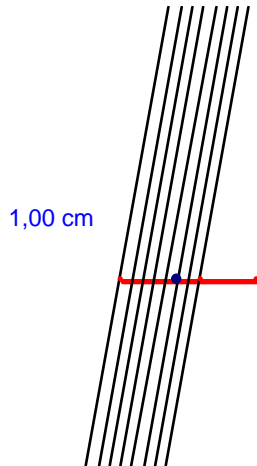
“ Dans $\frac{7}{3}$ (sept tiers), il y a deux fois $\frac{3}{3}$ et $\frac{1}{3}$.

Or $\frac{3}{3}$, c'est 1. Donc $2 < \frac{7}{3} < 3$ et $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$.”

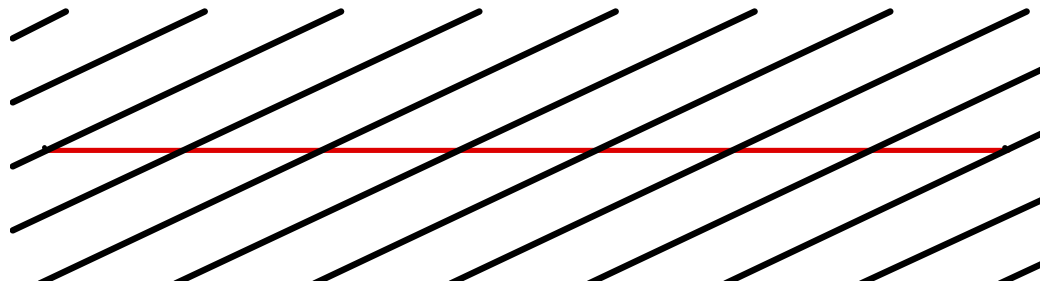
Fractions ou quotients d'entiers ?

Deux constructions d'un segment ayant pour longueur $\frac{12}{7}$ cm.

**Construction sollicitant l'aspect
"fraction" et l'expression
"Douze septièmes"**



**Construction sollicitant l'aspect
"quotient" et l'expression
"Le septième de 12 cm"**



Les deux segments obtenus ont-ils bien la même longueur ?

Depuis l'école, on sait que 14, c'est 2 fois 7, ce qu'on écrit : 7×2 , et que 12 n'est pas égal à un nombre entier de fois 7. En revanche, les exemples traités précédemment dans le cadre des mesures de longueur donnent du sens à l'énoncé suivant : 12, c'est $\frac{12}{7}$ fois 7, ce que l'on note : $7 \times \frac{12}{7}$ ou $\frac{12}{7} \times 7$

Autrement dit, $\frac{12}{7}$ est le nombre qui, multiplié par 7, donne 12.

$$7 \times \frac{12}{7} = 12$$

$$\frac{12}{7} \times 7 = 12$$

Cycle 3

Sixième

Nombres décimaux

En construction, structuration :

“ Déterminer la valeur de chacun des chiffres composant une écriture à virgule, en fonction de sa position. ”

Commentaires :

Les écritures à virgule prennent sens en étant mises en relation avec les fractions décimales [...]. Cela permet de comprendre que la valeur d'un chiffre est dix fois plus petite que celle du chiffre écrit immédiatement à sa gauche et dix fois plus grande que celle du chiffre qui est écrit immédiatement à sa droite (ce qui est vrai aussi bien pour la partie entière que pour la partie décimale).

Compétences

“ Connaître et utiliser la valeur des chiffres en fonction de leur rang dans l'écriture d'un entier ou d'un décimal. ”

Commentaires :

Sans refaire tout le travail réalisé à l'école élémentaire, l'objectif principal [est] d'assurer une bonne compréhension de la valeur des chiffres en fonction du rang qu'ils occupent dans l'écriture à virgule.

Extraits de la conférence de Roland Charnay aux journées IG-IPR de mathématiques de Lyon au printemps 2004

- Du côté de l'école primaire, le travail sur la compréhension des écritures décimales (valeur des chiffres en fonction de leur position, relations entre unités de rangs différents) *est insuffisant et laisse trop rapidement la place à la mise en place de techniques ou de questions formelles* (repérage du chiffre des dizaines et de celui des unités, par exemple) ;

- Du côté du collège, une reprise est nécessaire, sans refaire ce qui a été fait à l'école primaire, mais en sollicitant en permanence la compréhension des écritures décimales... et donc *en évitant d'aller trop rapidement vers l'utilisation de techniques non justifiées.*

“Associer les désignations orales et l’écriture chiffrée d’un nombre décimal”.

“ 14,5 se lit 14 et demi ou 14 et 5 dixièmes 5,23 se lit 5 et 23 centièmes ou 5 deux dixièmes et 3 centièmes. La lecture courante (5 virgule 23) n’est pas exclue, mais il s’agit de ne pas la systématiser dans la mesure où son usage trop fréquent contribue à envisager le nombre décimal 5,23 comme deux entiers juxtaposés (5 d’un côté et 23 de l’autre). ”

“ Passer pour un nombre décimal, d’une écriture fractionnaire (fractions décimales) à une écriture à virgule (et réciproquement)”.

$$\frac{956}{10} = 95 + \frac{6}{10} = 95,6$$

$$\frac{503}{100} = 5 + \frac{3}{100} = 5,03$$

23, 042 est mis en relation avec des lectures significatives “23 et 4 centièmes et 2 millièmes”, “23 et 42 millièmes”.

Registre de la langue vernaculaire

“ Associer diverses désignations d’un nombre décimal : écriture à virgule, fractions décimales. ”

$$23,042 \text{ est mis en relation avec } 23 + \frac{4}{100} + \frac{2}{1000}$$

Registre des fractions décimales

Construction, structuration

“ Utiliser les nombres décimaux pour exprimer la mesure de la longueur d’un segment, celle de l’aire d’une surface (une unité étant donnée) ou pour repérer un point sur une droite graduée de 1 en 1.”

Commentaires :

... (le partage en 10 ou en 100 étant effectif ou seulement évoqué).

Mettre en relation

3 m 25 cm et 3,25 m,

3 m 5 cm et 3,05 m,

2 h 30 et 2,5 h

“Centime d’euro” et “centième d’euro”

23,042 est mis en relation avec l’expression d’une mesure, une unité étant choisie : 23,042 m, c’est 23 mètres plus 4 centièmes de mètre (4 cm) plus 2 millièmes de mètre (2 mm) ou 23 mètres plus 42 millièmes de mètres (42 mm), ce qui permet d’écrire :

$$23,042 \text{ m} = 23 \text{ m} + 4 \text{ cm} + 2 \text{ mm}$$
$$= 23 \text{ m} + 42 \text{ mm}.$$

Cadre des grandeurs

Registre des calculs avec unités

“Produire des décompositions liées à une écriture à virgule, en utilisant 10, 100, 1000 ... et 0,1 ; 0,01 ...”.

Exemples :

$$156,34 = 100 + (5 \times 10) + 6 + \left(3 \times \frac{1}{10}\right) + \left(4 \times \frac{1}{100}\right)$$

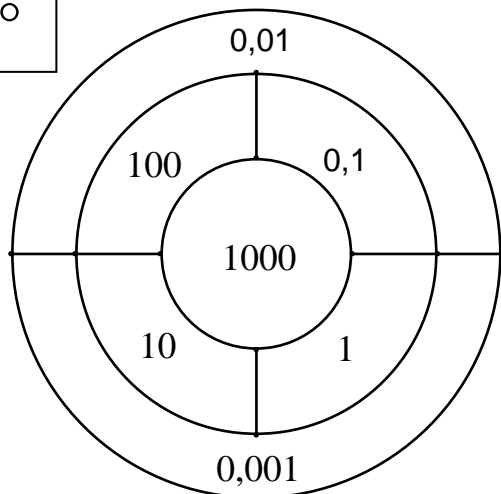
$$156,34 = 100 + 50 + 6 + (3 \times 0,1) + (4 \times 0,01)$$

“ Produire des suites écrites ou orales de 0,1 en 0,1, de 0,01 en 0,01 ...”.

Ce registre utilisant 0,1 ; 0,01 ; ... est peu utilisé à l'école, et encore moins au collège

Quelques exemples d'emploi :

1°



Idée tirée du Manuel Cap Maths CM2 (Hatier) :

- Combien faut-il lancer de fléchettes dans la zone 0,01 (resp. 0,001) pour marquer exactement 1 point ?
- Comment peut-on marquer un point en lançant des fléchettes dans les zones 0,1 et 0,01 ? Il doit y avoir des fléchettes dans les deux zones. Trouve au moins cinq solutions différentes.

2° « Un premier nombre est affiché sur l'écran d'une calculatrice (par exemple 4,785). Sans éteindre la calculatrice, ni effacer le nombre affiché, il s'agit d'obtenir l'affichage de 4,805 en une seule opération. »

Exemple tiré du document d'accompagnement "Utiliser les calculatrices - Cycle des apprentissages fondamentaux - Cycle des approfondissements (Page 13)

« Pour répondre, l'élève doit remarquer que le chiffre des centièmes est passé de 8 à 0 pour obtenir un nombre plus grand ; il a "avancé de 2", entraînant le chiffre des dixièmes. Il faut donc ajouter 2 centièmes et donc taper [+] 0,02 [=]. L'élève utilise plusieurs connaissances : repérage des chiffres, valeur du chiffre en fonction de sa position, équivalence [Egalité] entre 2 centièmes et 0,02. »

23,042 est mis en relation avec :

$$\frac{23042}{1000}$$

“ La relation entre écriture à virgule et quotient de 23042 par 1000 est **une nouveauté pour les élèves.**”

23,042 est le nombre qui, multiplié par 1000, donne 23 042.

Ordre sur les nombres décimaux

“Comparer deux nombres décimaux donnés par leurs écritures à virgule.”

“ Traduire le résultat de la comparaison en utilisant les signes $<$ et $>$ ”.

Commentaires :

La comparaison de nombres tels que 2,58 et 2,6 se ramène à celle de leurs parties décimales, mais celles-ci ne doivent pas être considérées comme des entiers : les élèves doivent comprendre qu’il s’agit en fait de comparer $\frac{5}{10}$ avec $\frac{6}{10}$ ou $\frac{58}{100}$ avec $\frac{60}{100}$.

Le recours à des graduations peut être une aide pour les élèves.

“ Comparer deux nombres entiers ou décimaux, ranger une liste de nombres. ”

Commentaires :

Les erreurs relatives à l’ordre sur les décimaux proviennent le plus souvent d’une interprétation erronée de l’écriture à virgule. Les règles utilisées pour comparer, encadrer, intercaler des nombres doivent donc être justifiées en s’appuyant sur la signification des écritures décimales.

La placement sur une demi-droite graduée est pour cela un bon support d’activités.

Commentaires (personnels) :

Les commentaires officiels ne peuvent décrire plus précisément de telles justifications.

Au CM2, on peut produire (et faire produire par les élèves) des *justifications orales* telles que :
“ 8 centièmes, c’est moins que 1 dixième, donc 5 dixièmes et 8 centièmes c’est moins que 5 dixièmes plus 1 dixième, c’est-à-dire 6 dixièmes. Donc 2 plus 5 dixièmes plus 8 centièmes c’est moins que 2 plus 6 dixièmes. ”
Et on écrit : “ $2,58 < 2,6$ ”.

La pratique seulement orale des justifications limite leur efficacité et leur appropriation.

De telles justifications orales sont rares en 6^e.

On pourrait sans doute les reprendre, à *l'écrit*, en faisant des symboles < et > des outils de travail pour justifier (et pas seulement pour écrire le résultat) :

$$\frac{8}{100} < \frac{1}{10} \text{ donc } \frac{5}{10} + \frac{8}{100} < \frac{5}{10} + \frac{1}{10} \text{ et donc } \frac{5}{10} + \frac{8}{100} < \frac{6}{10}$$

En général, au cycle 3, on va jusqu'à des règles de comparaison reposant sur l'ordre lexicographique des parties décimales en cas d'égalité des parties entières, ...

Et même parfois, dans ce cas, sollicitant la mise au même format des deux parties décimales par ajouts de 0, et comparaison des entiers ainsi obtenus ...

En général, on va assez vite vers des règles formelles sur les écritures :

- ordre lexicographique des parties décimales en cas d'égalité des parties entières,
- mais surtout, dans ce cas, mise au même format des deux parties décimales par ajouts de 0, et comparaison des entiers ainsi obtenus ...

ce qui renforce la conception du décimal comme deux entiers juxtaposés !

“ $14,068 < 14,3$ car $14,068$ ne comporte pas de dixième alors que $14,3$ en comporte 3 et les 6 centièmes et 8 millièmes représentent moins d’un dixième.”

$14,3$ s’écrit aussi $14,300$ car 3 dixièmes c’est la même chose que 300 millièmes

(Voir Relations entre certains décimaux).

$14,068 < 14,3$ car 14 unités et 68 millièmes, c’est moins que 14 unités et 300 millièmes.

Tendance à aller trop vite en 6e vers une règle formelle sans la justifier

Comment éviter de renforcer la conception du décimal comme deux entiers juxtaposés ?

Pour comparer $14,253$ et $14,2526$ on compare les chiffres de même rang, en allant de la gauche vers la droite, sans se préoccuper ni des longueurs des parties décimales, ni de la virgule.

Cette dernière sert seulement de repère pour déterminer les rangs.

(L’encadrement et l’intercalation ne seront pas abordées ici.)

Valeur approchée décimale

“ Donner une valeur approchée d’un nombre décimal à l’unité près, au 1/10 ou au 1/100 près.”

Commentaires :

“ La notion de valeur approchée fait l’objet d’un tout premier travail qui doit prendre sens pour l’élève, en relation avec le contexte issu de la vie courante, de la physique, de la géographie ... Par exemple, pour la monnaie, on n’utilise que des nombres avec deux décimales. ”

“ Donner la valeur approchée décimale (par excès ou par défaut) d’un décimal à l’unité, au dixième, au centième près. ”

Commentaires :

“ Le travail sur la notion de valeur approchée décimale d’un nombre doit être mené dans des situations significatives : recherche de l’ordre de grandeur du résultat d’un calcul, interprétation du résultat donné par une calculatrice en fonction du contexte ... Sans formalisation excessive, les notions d’arrondi et de troncature peuvent être distinguées, notamment en liaison avec l’usage des calculatrices. ”

Relations entre certains nombres décimaux

“ Connaître et utiliser des écritures fractionnaires et décimales de certains nombres :

0,1 et $\frac{1}{10}$; 0,01 et $\frac{1}{100}$; 0,5 et $\frac{1}{2}$;

0,25 et $\frac{1}{4}$; 0,75 et $\frac{3}{4}$. ”

“ Connaître et utiliser les relations entre :

$\frac{1}{4}$ (ou 0,25) et $\frac{1}{2}$ (ou 0,5) ; entre $\frac{1}{100}$ et $\frac{1}{10}$;

entre $\frac{1}{1000}$ et $\frac{1}{100}$.

Vous avez dit “registres” ?

Dans une unité, il y a 10 dixièmes.

$$10 \times \frac{1}{10} = 1$$

$$10 \times 0,1 = 1$$

Dix centièmes, c'est un dixième.

$$\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$

$$0,10 = 0,1$$

Justification des zéros inutiles.

Multiplication et nombres décimaux

“ Multiplier ou diviser un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1000.

“ Multiplier un nombre par 10, 100, 100 et par 0,1 ; 0,01 ; 0,001.”

Décaler les chiffres d'un ou plusieurs crans vers la gauche ou vers la droite,

Plutôt que de décaler la virgule

17,805 c'est :
1 dizaine, 7 unités, 8 dixièmes et 5 millièmes

Si on prend 10 fois ce nombre, on obtient :
10 dizaines, 70 unités, 80 dixièmes et 50 millièmes

En faisant des échanges “dix contre un”, on aura :
1 centaine, 7 dizaines, 8 unités et 5 centièmes
Donc : **178,05**

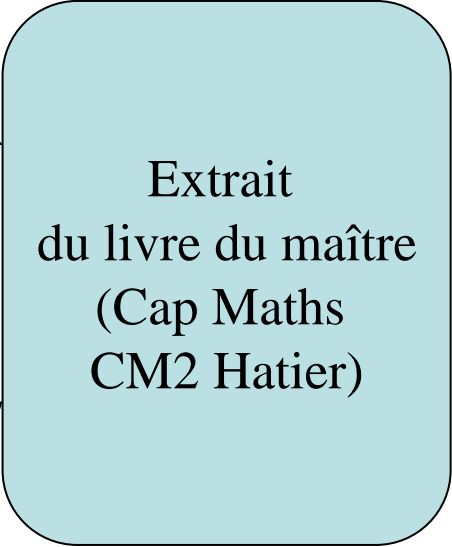
Explication utilisant le registre de la langue Vernaculaire (Cap Maths CM2 Hatier)

Dans l'énoncé de la règle, préférer le procédé de changement de rang pour les chiffres au décalage de la virgule, et ceci pour deux raisons :

- il rend compte de l'effet de la multiplication sur chaque chiffre (Voir le "tableau de numération") ;
- il est valable aussi bien pour les entiers que pour les décimaux.

Traitement analogue pour la division par 10, 100, 1000.

Contrairement à une idée répandue, quand on divise par exemple par 10, ce n'est pas la virgule qui se déplace, mais les chiffres qui changent de valeur : tous les chiffres se décalent d'un rang vers la droite.



Extrait
du livre du maître
(Cap Maths
CM2 Hatier)

Utiliser la définition d'un décimal
comme quotient : 39,5 est le nombre qui,
multiplié par 10 donne 395.

$$39,5 \times 10 = 395 \text{ donc } 39,5 \times 100 = 3950$$

$$3,906 \times 100 = ?$$

$$3,906 \times 1000 = 3906 \text{ donc } ? \times 10 = 3906,$$

$$\text{donc } ? = 390,6$$

“ La multiplication par 0,1 ; 0,01 ; 0,001
est à mettre en place en sixième en liaison
avec le sens de la multiplication par une
fraction décimale : “*prendre le dixième
(le centième) d'un nombre*”.

La multiplication par ces puissances de
dix peut être reliée à des problèmes
d'échelle ou de changements d'unités. ”.

Voir plus loin ...

“ Calculer le produit de deux nombres entiers ou le produit d’un décimal par un entier (3 chiffres par 2 chiffres), par un calcul posé.”

“ Les compétences relatives aux techniques opératoires sont inséparables de la résolution de problèmes.[...] Une technique doit être mise en place au cycle 3, en s’attachant en priorité à assurer la compréhension de son fonctionnement.”

“ Les limitations relatives à la taille des nombres ne concernent évidemment pas les calculs du type 2455×10 ou $12,563 \times 100$. ”

“ La multiplication d’un nombre décimal par un entier [est] un acquis du cycle 3.

La multiplication de deux nombres décimaux est, en revanche, à mettre en place en sixième, aussi bien du point de vue du sens que du point de vue de la technique posée.

Le sens de la multiplication de deux décimaux est en rupture avec celui de la multiplication de deux entiers notamment par le fait que, dans ce cas, « une multiplication » n’agrandit pas toujours. ”

Multiplication d'un décimal par un entier

Procédures personnelles (Exemple)

Pour calculer $84,7 \times 46$:

- calcul de 84×46 ,
- calcul de 7 par 46 (pour obtenir des dixièmes)
- échange de dixièmes contre des unités pour donner le résultat.

Utilisation de la définition d'un décimal en tant que quotient

Pour aller vers une "règle"

Le professeur d'école pose la question :

“Comment utiliser le résultat de 456×208 pour calculer $4,56 \times 208$?”

$$100 \times 4,56 = 456$$

$$\text{donc } 100 \times 4,56 \times 208 = 456 \times 208 \\ = 94848.$$

$$\text{Donc } 4,56 \times 208 = \frac{94848}{100}$$

Exemples de réponses :

- 4,56 c'est 456 : 100 donc le résultat de 456×208 est obtenu en divisant celui de 456×208 par 100 : 948,48.
- raisonnement identique reposant sur le fait que 4,56 c'est 456 centièmes.

Présentation de la technique usuelle
de la multiplication posée par le
professeur

Autre présentation possible :

$$\begin{array}{r} 456 \text{ centièmes} \\ \times 208 \\ \hline 3648 \\ 91200 \\ \hline 94848 \text{ centièmes} \\ 948,48 \end{array}$$

Multiplication de deux décimaux

$$12,35 \times 7,4 = 12,35 \times 7 + 12,35 \times 0,4$$

Deux stratégies possibles :

- directe
- en passant par la multiplication par 0,1

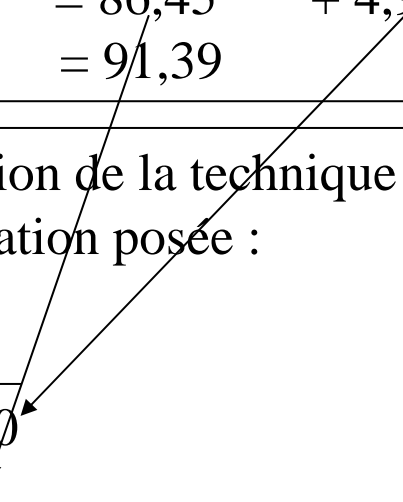
Stratégie directe

0,4 c'est 4 : 10, donc le résultat de $12,35 \times 0,4$ est obtenu en divisant par 10 celui de 12,35 par 4, ce que l'on sait faire au CM2.

Et donc :

$$\begin{aligned} 12,35 \times 7,4 &= 12,35 \times 7 + 12,35 \times 0,4 \\ &= 86,45 + 4,94 \\ &= 91,39 \end{aligned}$$

Justification de la technique de la multiplication posée :

$$\begin{array}{r} 12,35 \\ \times 7,4 \\ \hline 4,940 \\ 86,45 \\ \hline 91,390 \end{array}$$


Justification “classique”

$$\begin{array}{r}
 12,35 \\
 \times 7,4 \\
 \hline
 4940 \\
 8645 \\
 \hline
 91,390
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \xrightarrow{\times 100} \\
 \xrightarrow{\times 10} \\
 \\
 \xrightarrow{\div 1000}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 1235 \\
 \times 74 \\
 \hline
 4940 \\
 8645 \\
 \hline
 91390
 \end{array}$$

Autre stratégie :

On établit d’abord, avec le même type de justification que celle faite pour $12,35 \times 0,4$, que $12,35 \times 0,1$, c’est $12,35$ divisé par 10.

On utilise ensuite :

$$\begin{aligned}
 12,35 \times 7,4 &= 12,35 \times 7 + (12,35 \times 0,1) \times 4 \\
 &= 86,45 + 1,235 \times 4 = \dots
 \end{aligned}$$

En utilisant le multiplicateur décimal
comme quotient :

$$7,4 \times 10 = 74 \text{ donc :}$$

$$12,35 \times 7,4 \times 10 = 12,35 \times 74 ;$$

$$12,35 \times 7,4 \times 10 = 913,90 \text{ et donc}$$

$12,35 \times 7,4$ est le quotient de 913,9 par 10,
c'est-à-dire : 91,39.

D'où la "règle" ou "technique" :

Pour multiplier 12,35 par 7,4, on le
multiplie par 74 (ce qu'on sait faire :
produit d'un décimal par un entier)
et on divise le résultat obtenu par 10.

Ainsi, pour multiplier un décimal
par $\frac{74}{10}$,

on le multiplie par 74 et on divise
par 10. (Voir la multiplication d'un
décimal par un quotient $\frac{a}{b}$).

$$\begin{array}{r}
 9,85 \\
 \times 0,706 \\
 \hline
 0,0591 \\
 6,895 \\
 \hline
 6,9541
 \end{array}$$

A mettre en relation avec la technique "standard" :

$$\begin{array}{r}
 9,85 \\
 \times 0,706 \\
 \hline
 5910 \\
 68950 \\
 \hline
 6,95410
 \end{array}$$

Justifications en liaison avec la résolution de problème

3 kg de gruyère à 9,85 € le kilo ...
 $9,85 \times 3$

0,706 kg à 9,85 € le kilo ?

0,1 kg 0,985 €
 0,7 kg 0,985 € $\times 7$ (soit 6,895 €)

0,001 kg 0,00985 €
 0,006 kg 0,00985 € $\times 6$ (soit 0,0591 €)

donc 0,706 kg 6,895 € + 0,0591 €
 6,9541 € arrondi à 6,95 €

Justification de la multiplication posée

Exceptionnellement, voir ci-contre

Ecriture fractionnaire (d'un quotient de deux nombres entiers)

“ Interpréter $\frac{a}{b}$ comme quotient de l'entier a par l'entier b , c'est-à-dire comme le nombre qui, multiplié par a donne b . ”

$\frac{7}{3}$ est un nombre que l'on pourra envisager comme :

- 7 fois un tiers ;
- le tiers de 7, ou le nombre qui, multiplié par 3 donne 7 ;
- un nombre dont une valeur approchée est 2,33.

“ La remarque est faite que tout nombre décimal peut s'écrire sous forme d'un quotient. Par exemple, $0,4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. En revanche, certains quotients ne sont pas des nombres décimaux : $\frac{7}{3} \neq 2,33$. ”

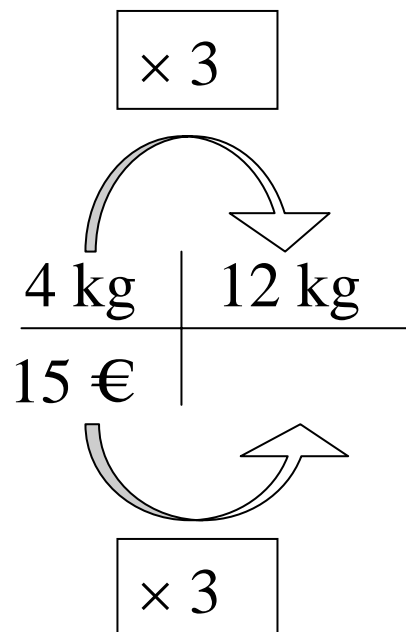
“ Multiplier un nombre entier ou décimal par un quotient d’entiers sans effectuer la division. ”.

“ Il s’agit de “prendre une fraction” d’une quantité. L’utilisation des quotients, sous forme fractionnaire, permet de gérer plus facilement les raisonnements et de repousser la recherche d’une valeur approchée décimale à la fin de la résolution. ”

Commentaires (personnels)

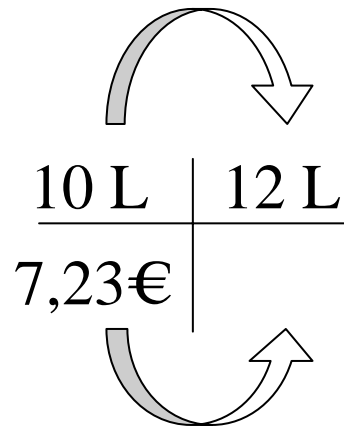
Ces nouveaux nombres vont pouvoir servir pour traiter des problèmes de proportionnalité là où les nombres entiers ou décimaux ne suffisent pas, tout en gardant les mêmes procédures de traitement (généralisation du “nombre de fois”).

3 fois



1,2 fois

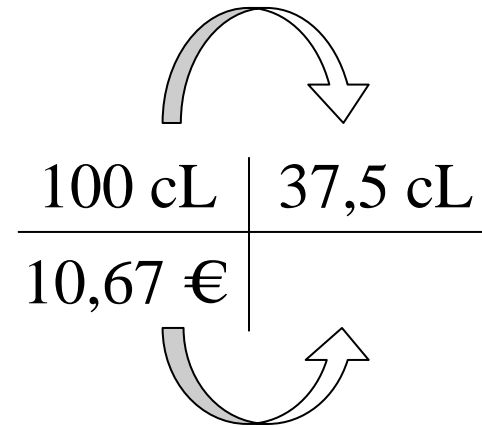
$$\times 1,2 \text{ ou } \times \frac{12}{10}$$



$$\times 1,2 \text{ ou } \times \frac{12}{10}$$

0,375 fois

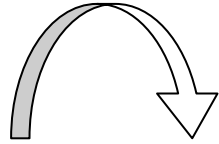
$$\times 0,375 \text{ ou } \times \frac{37,5}{100} \text{ ou } \times 37,5\%$$



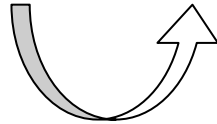
$$\times 0,375 \text{ ou } \times \frac{37,5}{100} \text{ ou } \times 37,5\%$$

$\frac{12}{7}$ fois

$$\times \frac{12}{7}$$



| | | |
|---------|--|-------|
| 7 kg | | 12 kg |
| <hr/> | | |
| 15,47 € | | |



$$\times \frac{12}{7}$$

Comment calculer $15,47 \text{ €} \times \frac{12}{7}$?

- en s'appuyant sur l'aspect "fraction" de $\frac{12}{7}$, "douze septièmes" : on calcule 1 septième de 15,47 €, en divisant par 7 ; cela fait 2,21 €, puis on calcule 12 septièmes en multipliant par 12 : $2,21 \text{ €} \times 12$; cela fait 26,52 €.
- s'appuyer sur l'aspect "quotient" de $\frac{12}{7}$, "le septième de douze" : on calcule 12 fois 15,47 €, en multipliant par 12 ; cela fait 185,64 €, puis on en calcule le septième, en divisant par 7 : $185,64 \text{ €} \div 12$; cela fait 26,52 €.
- en utilisant la calculatrice : on calcule $\frac{12}{7}$. La calculatrice affiche $\frac{12}{7} \approx 1,714285714$. Puis on multiplie le nombre ainsi obtenu par 15,47 (€) : cela fait 26,52 (€).

La citation suivante, extraite d'un ouvrage d'Henri Lebesgue écrit à l'intention des professeurs, fournit une légitimation de l'enseignement des nombres rationnels par leur aspect "quotient" (il emploie le mot "rapport" à la place du mot "quotient"), ainsi qu'une incitation à l'emploi effectif des calculs approchés à une époque où les calculatrices n'existaient pas ...

Citation d'Henri Lebesgue

(*La mesure des grandeurs*, Librairie Albert Blanchard, 1975)

« Dans les petites classes, la réforme que je propose peut sembler se réduire au remplacement du mot fraction par un autre : rapport par exemple. Car il faudrait bien s'occuper des propriétés

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}; \frac{ab}{bc} = \frac{a}{c}$$

Et énoncer les règles correspondantes relatives au calcul du rapport des deux nombres (quelconques et non plus nécessairement entiers). Pourtant, la réforme serait effective si l'on consentait à ce que les enfants n'étudient plus deux numérations, la numération des $n^{\text{ièmes}}$ pour les nombres commensurables et la numération décimale ; si on leur permettait d'écrire 0,428 là où la réponse est $\frac{3}{7}$.

Sans doute a divisé par b , a sur b , se lit encore a b -ièmes quand a et b sont entiers, mais cette locution n'oblige pas plus à développer toute la théorie des fractions que la locution quatre-vingt-douze n'oblige à traiter de la numération en base vingt.

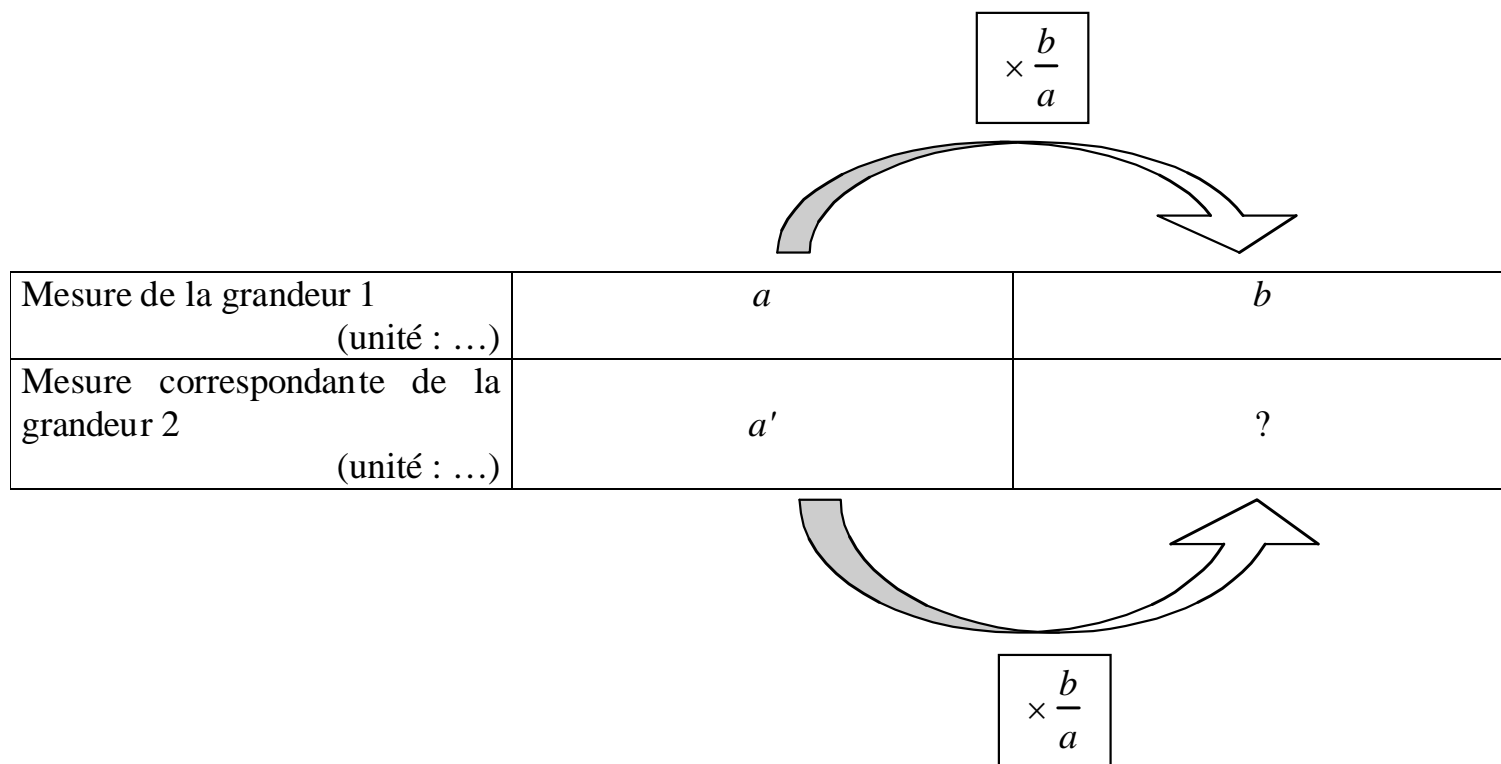
[...]

D'une façon générale, si tous les calculs finis, exacts, les seuls qu'admettaient les Anciens, ont conservé toute leur importance mathématique, s'ils doivent être connus et étudiés par les Mathématiciens actuels, leur importance pratique a considérablement diminué, et est parfois disparue totalement. Partout ces calculs, dits exacts, ont été détrônés par les calculs approchés et souvent les calculs exacts ne sont considérés que parce qu'ils conduisent au mode le plus simple de calcul approché. [...] »

Justification des techniques de résolution d'un problème de proportionnalité et considérations sur les grandeurs

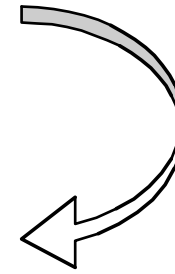
La résolution de problèmes dans des situations de proportionnalité peut convoquer l'emploi de quotients comme opérateurs de deux manières qui sont sensiblement différentes du point de vue conceptuel :

- le quotient utilisé comme opérateur scalaire :



– le quotient utilisé comme coefficient de proportionnalité :

| | | |
|---|------|-----|
| Mesure de la grandeur 1 (unité : u) | a | b |
| Mesure correspondante de la grandeur 2 (unité : v) | a' | ? |



$$\times \frac{a'}{a}$$

Si l'on reste dans l'univers des grandeurs, au lieu de tout aplatir sur le domaine numérique des mesures, on s'aperçoit que le quotient $\frac{a'}{a}$ n'est en général pas un scalaire. C'est la mesure avec

l'unité $\frac{v}{u}$ d'une troisième grandeur : la grandeur - quotient de la grandeur 2 par la grandeur 1.

Cette grandeur - quotient, en général, a une dimension et n'est pas un “nombre pur”. Dans une situation de proportionnalité, cette grandeur - quotient est une grandeur constante.

Ce qui précède montre que, dans les problèmes mettant en jeu la proportionnalité, l'emploi du coefficient de proportionnalité est conceptuellement plus difficile que l'emploi des techniques scalaires. Les élèves l'ont cependant utilisé à l'école primaire, et son emploi en classe de 6^e est donc légitime. Il convient cependant d'éviter le cas de grandeurs proportionnelles dont les dimensions sont telles que la grandeur - quotient soit d'un type inconnu (vitesse, masse volumique, ...). C'est la raison pour laquelle le programme insiste sur le cas où les deux grandeurs proportionnelles sont de même espèce : deux prix dans le cas d'une hausse de prix de 5% ; et plus généralement toutes les situations évoquant une hausse ou baisse d'une grandeur en terme de pourcentage (deux populations dans le cas d'une baisse de population entre deux recensements ...) ; échelles, ... Il importe que le coefficient en question soit un "scalaire".

On ne s'interdira pas cependant d'exploiter les situations familières déjà travaillées à l'école : proportionnalité entre quantité de denrées et leur prix, même si le coefficient de proportionnalité est une grandeur - quotient : l'unité avec laquelle ce coefficient est mesuré (€/kg, €/L, ...) est celui dont la loi oblige l'affichage, même si sa dénomination usuelle en masque l'aspect "quotient" : prix au litre, au kilogramme, ... au lieu de prix par litre, par kilogramme.

En fait, pour traduire la réalité quotidienne d'un consommateur, on est conduit à écrire des égalités entre grandeurs telles que :

$$0,975 \text{ kg} \times 112,90 \text{ \bar{U}/kg} = 110,08 \text{ \bar{U}}$$

$$2 \text{ u} \times 24,50 \text{ \bar{U}/u} = 49,00 \text{ \bar{U}}$$

$$3 \text{ lots} \times 26,45 \text{ \bar{U}/lot} = 79,35 \text{ \bar{U}}$$

les prix des articles affichés en rayon n'étant jamais des prix, mais des prix par unités commercialisées. Les situations concrètes ne sont pas toujours les plus simples ... On peut se demander si on simplifie le travail de compréhension de l'élève de 6^e en numérisant tout, en écrivant (et en lui faisant écrire) à la place de ce qui précède :

$$0,975 \times 112,90 = 110,08$$

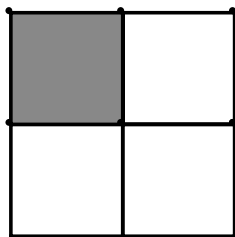
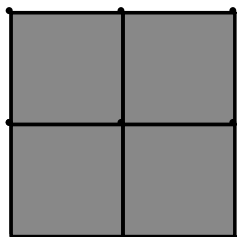
$$2 \times 24,50 = 49,00$$

$$3 \times 26,45 = 79,35$$

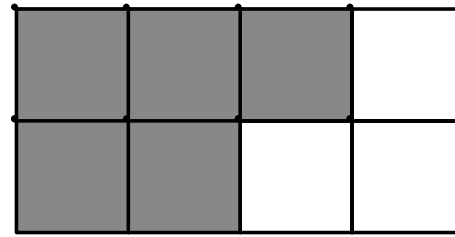
Calcul fractionnaire (justifications) (classe de 5^e, 4^e, ...)

Dans la plupart des manuels de 5^e, l'aspect "fraction" reprend le dessus lorsqu'il s'agit de traiter de l'addition et de la multiplication de "nombres écrits sous forme fractionnaire". Cette voie est bien sûr possible :

- pour l'addition, on évoque ainsi des parts de tarte, des aires de secteurs circulaires, de carrés ou rectangles munis d'un quadrillage (aires en tant que grandeur unidimensionnelle) ; mais le risque de confusion est parfois grand en ce qui concerne l'unité de référence, notamment lorsque cette dernière n'est pas un disque :



$$\frac{5}{4} ?$$



$$\frac{5}{8} ?$$

Justification des règles de calcul sur les quotients, par exemple celle relative à l'addition :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

Posons :

$$\frac{a}{b} = Q, \quad \frac{c}{b} = Q'$$

Définition d'un quotient

$\frac{a}{b}$ est le nombre qui, multiplié par b , donne a

$$bQ = a \quad \text{et} \quad bQ' = c$$

$$b(Q + Q') = bQ + bQ'$$

$$b(Q + Q') = a + c$$

$$Q + Q' = \frac{a+c}{b}$$

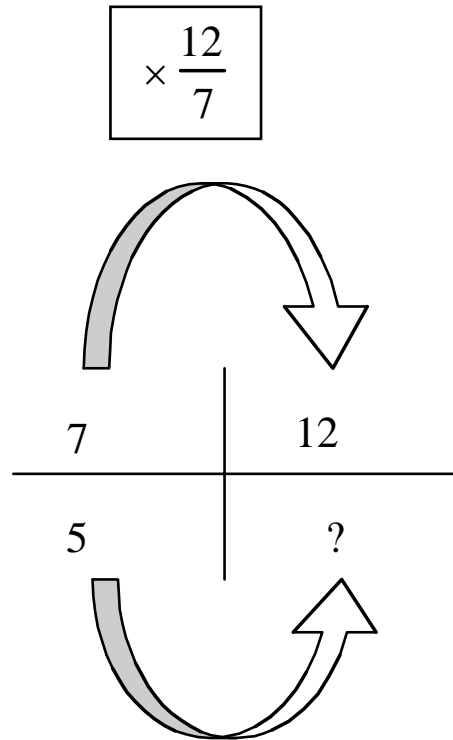
Quotients et fonctions linéaires

L'expérience montre que la fonction linéaire présentée comme modèle des situations de proportionnalité “passe” mal auprès des élèves, qui trouvent qu'elle n'apporte rien (puisqu'ils peuvent continuer à traiter ces situations comme ils le faisaient avant), et que les notations et écritures sont bien compliquées, sans parler des aspects langagiers (avoir pour image ..., être l'image de ...).

Une manière de montrer l'intérêt de cette notion consiste à utiliser la notation f pour traiter des problèmes de proportionnalité. Supposons par exemple que $f(7) = 5$; on demande de déterminer $f(12)$ (c'est ainsi que se formule un problème de recherche de quatrième proportionnelle).

On sait que $12 = 7 \times \frac{12}{7}$. Donc : $f(12) = f\left(\frac{12}{7} \times 7\right) = \frac{12}{7} f(7) = \frac{12}{7} \times 5 = \dots$

Cette technique utilise la propriété d'homogénéité d'une fonction linéaire, qui est facile à démontrer à partir de la définition usuelle. Les notations relatives aux fonctions permettent donc d'écrire en une seule ligne un raisonnement qui, dans les classes précédentes, nécessitaient la production d'un tableau tel que le suivant :



On notera que l'on n'utilise pas ici la définition ($f(x) = ax$) d'une fonction linéaire, mais une de ses propriétés (l'homogénéité), à laquelle il convient de donner une place.

Quotients - Nombres rationnels et irrationnels

• Une synthèse sur les nombres est prévue en 3^e, dans laquelle les nombres rationnels sont définis comme quotients d'entiers (avec l'écriture sous forme de fraction irréductible). Si cette dernière écriture est bien installée, il n'en est pas de même de la définition d'un nombre rationnel.

Il importe de faire remarquer que la plupart des nombres rencontrés jusqu'à la 3^e possèdent cette propriété : les nombres entiers (l'écriture d'un nombre entier sous forme fractionnaire n'est pas toujours disponible pour calculer des sommes du type $n + \frac{p}{q}$), mais aussi les nombres

décimaux. Au sujet de ces derniers, la définition d'un nombre décimal comme nombre pouvant s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ n'est pas suffisamment rencontrée au collège. Une plus grande fréquentation de l'écriture $\frac{14503}{1000}$ de 14,503 est à prévoir pour pouvoir déboucher sur une

définition en $\frac{a}{10^n}$ qui “montre” que tout nombre décimal est un nombre rationnel.

• Quant à la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ évoquée dans le programme, elle n'est pas systématiquement traitée. Pourtant, c'est l'existence de tels nombres qui justifie la présence dans le cours de 3^e d'un paragraphe intitulé “Opérations sur les radicaux” : ainsi, démontrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$ peut avoir une dimension autre que culturelle.