Suites associées

Fiche élève

Énoncé

Dans un repère orthonormé, on considère les points $\boldsymbol{A_n}$ dont les coordonnées $(x_n\,;y_n)$ sont ainsi définies :

pour $n=0$: $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 11 \end{cases}$ et, pour tout entier n : $\begin{cases} x_{n+1} = 0{,}8\,x_n - 0{,}6\,y_n + 2 \\ y_{n+1} = 0{,}6\,x_n + 0{,}8\,y_n - 2 \end{cases}$

Partie A : Explorer la situation à l'aide d'un tableur

1. À l'aide d'un tableur, calculer les 50 premiers termes des suites (x_n) et (y_n).
2. Représenter le nuage de points $\boldsymbol{A_n}$.
3. Quelle conjecture peut-on formuler quant à la nature de la courbe $\mathscr{C}$ obtenue?

Partie B : Affiner la conjecture à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique

1. Représenter dans un repère orthonormé les points $\boldsymbol{A}_0$, $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$ et $\boldsymbol{A}_3$ (les coordonnées de ces points ayant été relevées dans le fichier tableur).
2. Affiner la conjecture émise dans la partie précédente en précisant les éléments caractéristiques de la courbe $\mathscr{C}$.

Partie C : Vérification des résultats précédents à l'aide du tableur, puis démonstration

1. Vérifier expérimentalement sur la feuille de calcul les conjectures précédentes.
2. Démontrer ces conjectures.

Prolongement possible (en devoir à la maison par exemple)

1. On pose $\Omega(4\,;2)$. En utilisant un logiciel de géométrie dynamique, calculer les angles $\widehat{A_0\Omega A_1}$, $\widehat{A_1\Omega A_2}$, $\widehat{A_1\Omega A_2}$, $\widehat{A_2\Omega A_3}$ et $\widehat{A_2\Omega A_3}$.

   A l'aide de quelle transformation géométrique f semble-t-on obtenir le point $\boldsymbol{A}_{n+1}$ à partir du point $\boldsymbol{A_n}$?

2. On rappelle que $\cos(\widehat{A_n\Omega A_{n+1}}) = \dfrac{\overrightarrow{\Omega A_n}.\overrightarrow{\Omega A_{n+1}}}{\Omega A_n \times \Omega A_{n+1}} = \dfrac{(x_n-4)(x_{n+1}-4)+(y_n-2)(y_{n+1}-2)}{97}$

   (a) A l'aide du tableur calculer $\cos(\widehat{A_n\Omega A_{n+1}})$ puis l'angle $\widehat{A_n\Omega A_{n+1}}$ pour $n \in [\![0\,;49]\!]$.

   (b) Préciser le résultat conjecturé à la question précédente.

3. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct, on pose $z_n = x_n + i\,y_n$ l'affixe du point $\boldsymbol{A_n}$; $\omega = 4+2i$ est l'affixe du point Ω.

   Soit θ tel que $\cos\theta = 0{,}8$ et $\sin\theta = 0{,}6$.

   (a) Montrer que $(z_{n+1}-\omega) = e^{i\theta}(z_n-\omega)$.

   (b) Quelle est la transformation du plan qui au point $\boldsymbol{A_n}$ associe le point $\boldsymbol{A}_{n+1}$?