Acquisition de l'autonomie en classe de première

académie Bordeaux

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Équipe Académique Mathématiques - 2011

Objectif général

Outre l'apport de connaissances, le programme vise le développement des compétences suivantes :

- mettre en œuvre une recherche de façon autonome ;
- mener des raisonnements ;
- avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus ;
- communiquer à l'écrit et à l'oral.

Activité de l’élève

Les activités en classe et hors du temps scolaire prennent appui sur la résolution de problèmes purement mathématiques ou issus d’autres disciplines. De nature diverse, elles doivent entraîner les élèves à :

- chercher, expérimenter, modéliser, en particulier à l’aide d’outils logiciels ;
- choisir et appliquer des techniques de calcul ;
- mettre en œuvre des algorithmes ;
- raisonner, démontrer, trouver des résultats partiels et les mettre en perspective ;
- expliquer oralement une démarche, communiquer un résultat par oral ou par écrit.

En analyse

Le programme s’inscrit, comme celui de seconde, dans le cadre de la résolution de problèmes. Les situations proposées répondent à des problématiques clairement identifiées d’origine purement mathématique ou en lien avec d’autres disciplines.

En géométrie

L’objectif est de renforcer la capacité des élèves à étudier des problèmes dont la résolution repose sur des calculs de distances et d’angles, la démonstration d’alignement, de parallélisme ou d’orthogonalité.

Second degré

- **Capacités attendues :**
  Déterminer et utiliser la forme la plus adéquate d'une fonction polynôme de degré deux en vue de la résolution d'un problème : développée, factorisée, canonique.
- **Commentaires (séries ES, littéraire et STI2D-STL) :**
  la mise sous forme canonique n'est pas un attendu du programme.

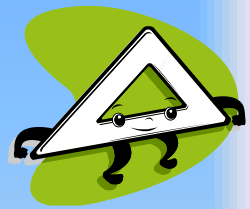
Dérivation

- **Capacités attendues :**
  exploiter le sens de variation pour l'obtention d'inégalités.
- **Commentaires :**
  on traite quelques problèmes d'optimisation.
  Il n'est pas toujours utile de recourir à la dérivation pour étudier le sens de variation d'une fonction. (série S)

Aire d’un triangle

Dans un repère orthonormé (O;I;J) on a A(1 ; 2) et P(c ; 0) avec $c > 1$. La droite (AP) coupe l’axe des ordonnées au point Q.

1) Construire la figure à l’aide d’un logiciel de géométrie dynamique.



2) Est-il possible que l’aire du triangle OPQ soit égale à 5 cm² ?

3) L’aire du triangle OPQ admet-elle une valeur minimale ?

En économie

Une entreprise fabrique et vend chaque jour un nombre x d'objets. Chaque objet est vendu 100 €.

<u>Partie A</u> Coût de production unitaire

Le coût de production unitaire $U(x)$ exprimant le coût de production par objet produit est $U(x) = x - 10 + \frac{900}{x}$ pour $x \in$ I avec I=[1 ; 100].

1)a. Conjecturer à l'aide de la calculatrice pour quelle production le coût unitaire est le plus bas.

b. Démontrer la conjecture et déterminer alors le bénéfice de l'entreprise.

2) Est-il possible d'avoir un coût de production unitaire inférieur ou égal à 80 € ?

Partie B Bénéfice

1) Montrer que le bénéfice global de l'entreprise est $B(x) = -x^2 + 110x - 900$.
2) Déterminer pour quelle production le bénéfice est maximal. Quel est ce bénéfice ?

Expression de deux vecteurs du plan en fonction de deux vecteurs non colinéaires

- **Capacités attendues : choisir une décomposition pertinente dans le cadre de la résolution de problèmes.**
- **Commentaires : on ne se limite pas au cas de la géométrie repérée.**

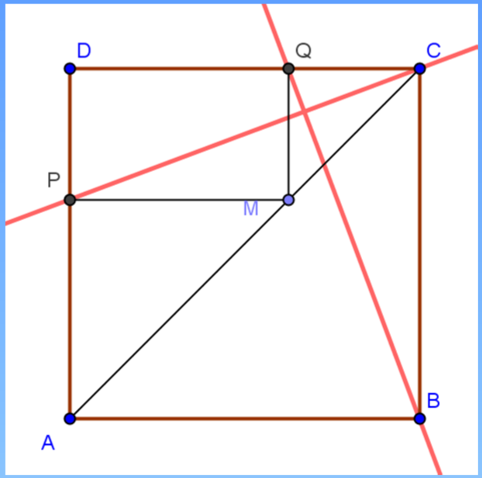
Produit scalaire

Capacités attendues :

- calculer le produit scalaire de deux vecteurs par différentes méthodes (projection orthogonale, analytiquement, à l'aide des normes et d'un angle, à l'aide des normes).
- choisir la méthode la plus adaptée en vue de la résolution d'un problème.

Droites perpendiculaires

ABCD est un carré.
M est un point du segment [AC] distinct de A et de C.
P et Q sont les projetés orthogonaux de M respectivement sur [AD] et [DC].

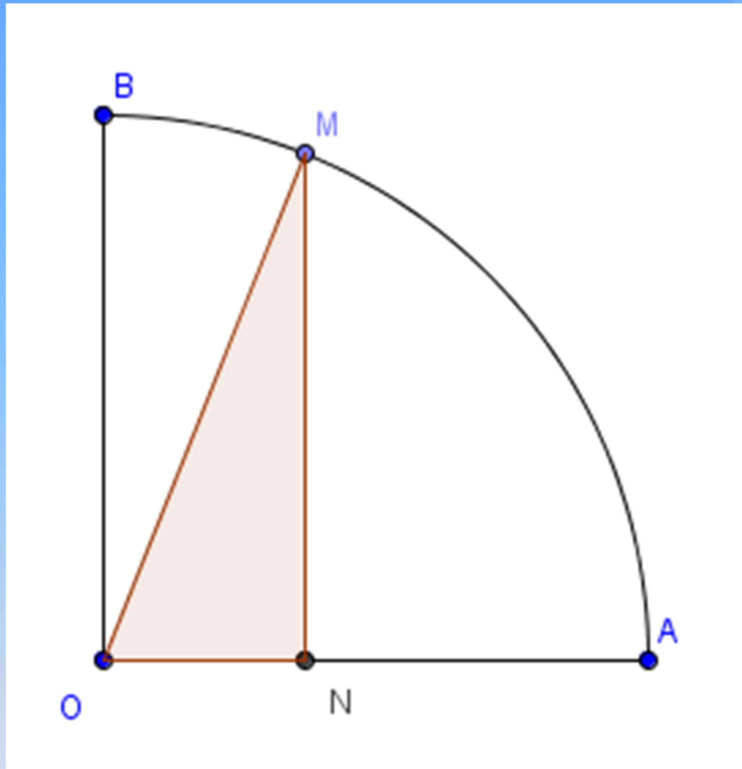


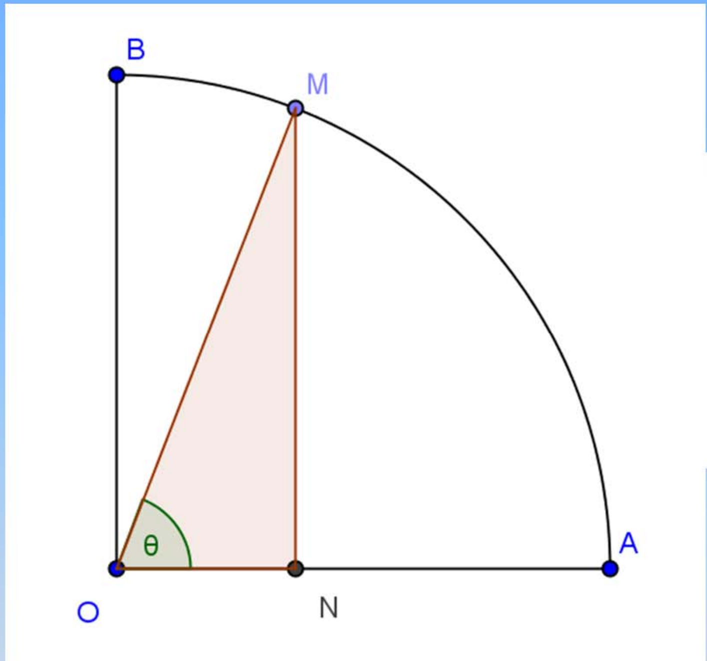
1) Conjecturer la position relative des droites (BQ) et (CP).
2) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BQ}.\overrightarrow{CP}$. Valider la conjecture.

Comment rendre compte d’un travail de recherche effectué par les élèves en autonomie ?

Privilégier une méthode experte

OAB est un quart de cercle de centre O et de rayon 1.
M est un point de l'arc $\overset{\frown}{AB}$.
N est le projeté orthogonal sur le segment [OA].
Peut-on trouver une position du point M pour que l'aire du triangle OMN soit maximale ?





Choix du paramètre : θ , mesure de $\widehat{\mathrm{AOM}}$. $\theta \in \left[0\,; \dfrac{\pi}{2} \right]$.

$A_{\mathrm{OMN}} = \dfrac{\mathrm{ON} \times \mathrm{MN}}{2}$. Alors $A_{\mathrm{OMN}} = \dfrac{\cos\theta \times \sin\theta}{2}$.

Obstacle 1

L'étude des fonctions cosinus et sinus n'est pas un attendu du programme

Les dérivées de ces fonctions ne sont pas connues en $1^{ère}$.

Une solution :

Formules d'addition et de duplication des fonctions cosinus et sinus.

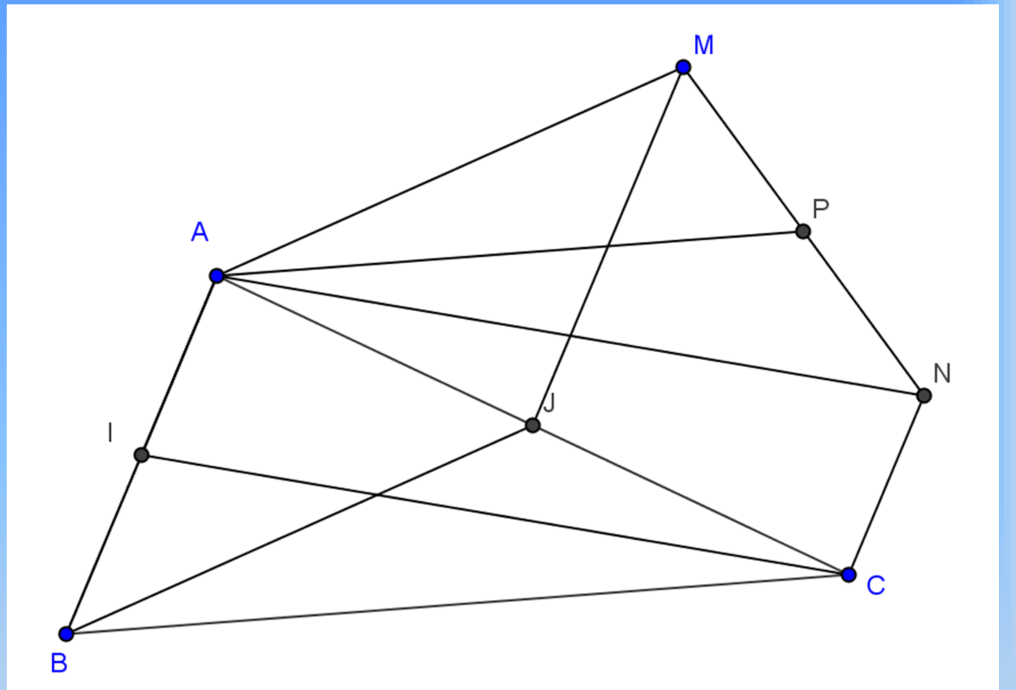
$$A_{\mathrm{OMN}} = \frac{\cos\theta \times \sin\theta}{2} = \frac{1}{2}\frac{\sin(2\theta)}{2} = \frac{\sin(2\theta)}{4}.$$

Il n’est pas toujours utile de recourir à la dérivation pour étudier le sens de variation d’une fonction.

L’aire est alors maximale si la fonction $\theta \mapsto \sin(2\theta)$ atteint son maximum sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

C’est le cas si $2\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$. Ce qui permet de démontrer la conjecture.

Donner un devoir maison différencié explorant différentes pistes



ABC est un triangle quelconque. I est le milieu de [AB], J celui de [AC]. M est le point tel que ABJM est un parallélogramme, N est le point tel que AICN est un parallélogramme. P est le milieu du segment [MN].

Que dire des droites (AP) et (BC) ?

Fréquents, de longueur raisonnable et de nature variée, les travaux hors du temps scolaire contribuent à la formation des élèves et sont absolument essentiels à leur progression. Ils sont conçus de façon à prendre en compte la diversité et l’hétérogénéité de leurs aptitudes.

Donner à chaque élève de façon <u>différenciée</u> une solution à rédiger, autre que celle qu’il a choisie en classe notamment, ou suivant les méthodes qu’il doit acquérir.
On peut aussi ne pas demander de méthode experte à certains.

Si on souhaite faire progresser l'élève dans le travail hors repère :

a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AP}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$.
b) En déduire une expression de $\overrightarrow{AP}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{IC}$.
c) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
d) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IC}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
e) En déduire que $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires. Conclure.

Si on souhaite que l'élève revoie les configurations usuelles :

- Démontrer la conjecture en utilisant G, le point d’intersection de (AP) et (JM), et K le point d’intersection de (AN) et (JM).

Ou

- Démontrer la conjecture à l’aide de H, le milieu du segment [JN].

Si on souhaite convaincre l'élève de l'efficacité du choix d’un repère :

- Démontrer la conjecture en choisissant le repère (B ;C ;A).

Ou

- Démontrer la conjecture en travaillant dans un repère.