Évolution de populations

Dans un pays de population constante égale à 60 millions d'habitants, on compte 20 millions de citadins et 40 millions de ruraux en 2005. Les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville et on constate que les mouvements de population suivent la règle suivante : chaque année, 20% des ruraux émigrent à la ville et 10% des citadins émigrent en zone rurale.

1) Calculer le nombre d'habitants dans chacune des zones en 2006, puis en 2007.
2) On note u_n la population en zone rurale et v_n la population en ville en l'année 2005 $+n$. Exprimer u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_n et v_n.
3) Écrire un algorithme permettant de calculer la population dans chaque zone après n années. Le tester pour n= 1 et n=2.
4) Quelle évolution peut-on prévoir à long terme ?

Dichotomie

1) Résoudre dans R l'équation $x^2 = 2$.

2) On considère l'algorithme suivant :

```
Variables : a, b, m
a prend la valeur 1
b prend la valeur 2
Tant que b – a > 0,1
        m prend la valeur (a+b)/2
        Si m² – 2 > 0 alors
                b prend la valeur m
        Sinon
                a prend la valeur m
        Fin si
Fin Tant que
Afficher a
Afficher b
```

a) Compléter le tableau suivant donnant les différentes étapes de l'algorithme :

	m	a	b	$b-a$
Initialisation		1	2	
Étape 1				
Étape 2				

b) Que fait cet algorithme ?

c) Modifier l'algorithme de manière à pouvoir choisir l'amplitude de l'encadrement obtenu.
Programmer cet algorithme à l'aide d'un logiciel ou de la calculatrice et le tester.

d) On veut maintenant obtenir un encadrement de la solution négative de l'équation $x^2 = 2$.
Pour cela on donne à a et b les valeurs respectives –2 et –1. L'algorithme fonctionne-t-il ?
Pourquoi ?

e) Modifier la condition de l'instruction « si … alors » de manière à ce que l'algorithme donne la réponse correcte.

3) a) Conjecturer à l'aide de la calculatrice le nombre de solutions de l'équation $x^3 = 3x + 1$.
b) Modifier l'algorithme précédent de manière à obtenir un encadrement d'amplitude 10^{-2} de la solution positive de cette équation, puis de chacune des solutions conjecturées.

Somme des termes d'une suite récurrente

La suite u est définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in N, u_{n+1} = u_n + 4n + 6 \end{cases}$

1) Calculer u_1, u_2.
2) Écrire un algorithme qui permet de calculer et d'afficher les termes de la suite (u_n) de u_0 à u_n, pour une valeur de n donnée.
   Le tester pour $n = 2$.
3) On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$. Donner l'expression de v_n en fonction de n puis montrer que la suite v est arithmétique. Calculer alors, en fonction de n, l'expression $v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$.
4) Justifier que $v_0 + v_1 + ... + v_{n-1} = u_n - u_0$.
5) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
6) Calculer u_{10} avec l'expression précédente puis la comparer avec le résultat donné par l'algorithme.
7) Calculer S_0, S_1, S_2.
8) Modifier l'algorithme précédent de manière à ne plus afficher les termes de la suite, mais à calculer et à afficher S_n pour une valeur de n donnée.
   Le tester pour $n = 2$.
9) Calculer S_{10}.