

Simulons avec le Grand-duc de Toscane

Problème

Le Grand Duc de Toscane aurait remarqué, à force de jouer, qu'en lançant trois dés et en totalisant les points obtenus, il était plus fréquent d'obtenir 10 que 9. Une telle constatation l'étonnait beaucoup puisque 10 et 9 se décomposent tous les deux de 6 manières différentes :

$$9 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 1 + 4 + 4 = 2 + 2 + 5 = 2 + 3 + 4 = 3 + 3 + 3$$

$$10 = 1 + 3 + 6 = 1 + 4 + 5 = 2 + 2 + 6 = 2 + 4 + 4 = 2 + 3 + 5 = 3 + 4 + 4$$

Les deux événements devraient donc avoir les mêmes chances de se produire.

Etudier cette problématique avec une approche statistique et probabiliste.

Partie A - Étude sur ordinateur

Simulation sur 5000 tirages

On simule 5000 lancers de trois dés afin de calculer leur somme.

1. Dans les cellules A2, B2, C2 et D2, noter « dé n°1 », « dé n° 2 », « dé n° 3 » et « somme ».
2. Dans la cellule A3, écrire une formule permettant de simuler le lancer d'un seul dé, c'est-à-dire un nombre choisi entre 1 et 6.
Aide : On pourra utiliser les fonctions `alea` et `ent`.
3. Copier cette formule en B3 et C3 et calculer la somme en D3.
4. Copier ces formules dans la plage A3:D5002.

Calcul des fréquences observées

Suivant le nombre de lancers effectués, on s'intéresse à la fréquence d'apparition des sommes 9 et 10.

5. En F2, G2 et H2, écrire respectivement « Nb de tirages », « Fréq. de 9 » et « Fréq. de 10 ».
6. En F2, écrire une formule permettant le calcul par recopie du nombre de lancers.
7. Dans la colonne G, écrire une formule permettant d'obtenir la fréquence d'apparition du 9 suivant le nombre de lancers
Aide : on pourra utiliser les fonctions `nb.si` et `nb`.
8. Dans la colonne H, écrire une formule permettant d'obtenir la fréquence d'apparition du 10 suivant le nombre de lancers
Aide : on pourra utiliser les fonctions `nb.si` et `nb`.

Création de diagramme

Créer un graphique représentant les fréquences d'apparition du 9 et du 10 en fonction du nombre de lancers effectués.

Aide : dans le tableur OpenOffice, on choisira le type de graphique « X-Y » en sélectionnant « lignes seules ».

Observation

En utilisant la touche **F9** du clavier, observer sur la feuille de calcul les variations des fréquences d'apparition du 9 et du 10 puis sur le diagramme, les positions relatives des courbes représentant les fréquences d'apparition du 9 et du 10.

Quelle conjecture peut-on émettre ?

Partie B - Étude mathématique

Démonstration de la conjecture

On souhaite prouver la conjecture faite ci-dessus et répondre ainsi au Grand-duc de Toscane : on lance trois dés, on fait leur somme et on s'intéresse à la fréquence d'apparition du 9 et du 10.

1. A l'aide d'un arbre (première) ou d'un raisonnement combinatoire (terminale), dénombrer les tirages possibles de lancers de trois dés (supposés différentiables).
2. Compter le nombre de façons différentes pour obtenir 9 à l'aide de trois dés.
3. Compter le nombre de façons différentes pour obtenir 10 à l'aide de trois dés.
4. Calculer alors la probabilité d'apparition du 9 puis du 10.
5. Le Grand-duc de Toscane a-t-il raison ?

Partie C - Lien entre statistiques et probabilités

1. Entrer les probabilités d'apparition dans les colonnes I et J.
2. Créer un nouveau graphique incluant les droites représentant ces probabilités.
3. Que peut-on remarquer quant à la convergence des fréquences observées ?