

Le « poolage »

La proportion de porteurs d'un parasite dans une population d'un million de personnes est p ($0 < p < 1$).

On dispose d'un test permettant de savoir de façon certaine qu'un échantillon de sang contient ou non le parasite, le résultat du test étant dit positif si le parasite est présent dans l'échantillon, et négatif sinon.

La méthode du poolage est utilisée dans la détection des porteurs du parasite au sein d'un ensemble de 60 individus tirés au sort de façon indépendante, afin d'économiser le nombre de tests utilisés.

Pour chacun des 60 individus, on possède un prélèvement sanguin. Dans la méthode du poolage, on répartit les 60 prélèvements en 20 groupes (20 « pools ») de 3 prélèvements. On mélange les 3 prélèvements de chaque pool et on teste les mélanges. Si le mélange est positif dans l'un des groupes, on teste chacun des 3 prélèvements des individus de ce pool ; sinon, on est sûr que chaque individu du groupe est négatif, puisque le mélange l'est.

Objectif : savoir dans quelles conditions ce poolage permet d'économiser des tests par rapport au fait de tester individuellement les 60 individus.

PARTIE 1

On dispose donc de 20 mélanges M_1, M_2, \dots, M_{20} de 3 échantillons.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de groupes pour lesquels le mélange est négatif.

On note T la variable aléatoire qui correspond au nombre total de tests effectués.

- 1) Justifier à l'aide d'un arbre que la probabilité qu'un mélange de 3 échantillons soit négatif est $(1 - p)^3$.
- 2) En déduire la loi de probabilité et l'espérance de X en fonction de p .
- 3) Prouver que $T = 80 - 3X$.
- 4) Déterminer alors $E(T)$ en fonction de p .

PARTIE 2

Le nombre de tests à effectuer étant 60 (si on teste tous les individus choisis), on considère que le poolage est rentable si $E(T)$ est inférieur ou égal à 60.

- 1) Justifier que $E(T) \leq 60$ si et seulement si $(1 - p)^3 \geq \frac{1}{3}$.
- 2) A l'aide de la méthode de votre choix, trouver les valeurs de la proportion p d'individus portant le parasite dans la population totale pour lesquelles cette méthode de poolage est avantageuse.