Introduction de la loi binomiale

Niveau

Première

Prérequis

Utilisation de Xcas en mode de programmation élémentaire ; utilisation de sous programmes avec Xcas.

Objectifs

À partir d'une situation connue des élèves (simulation du lancer d'une pièce) effectuer diverses simulations en se plaçant dans un autre registre : conjecturer la probabilité d'obtenir un nombre donné de « Pile » au cours de *n* lancers.

L'objectif est d'une part d'effectuer un travail « simple » d'algorithmique afin de mettre en place la situation et d'autre part de modifier ou d'utiliser différents algorithmes afin de mettre en évidence les invariants (représentation graphique) et les paramètres de la loi binomiale ainsi que l'influence de leur modification.

Organisation pratique

Cette activité peut être prise à différents niveaux suivant les compétences des élèves en algorithmique : il semble intéressant de faire construire les deux premiers algorithmes par les élèves afin qu'ils s'approprient la situation ; par contre dans la suite du travail le professeur peut fournir aux élèves les différents algorithmes utiles et leur demander de les analyser et de les modifier afin de répondre aux différentes questions ; le but étant de caractériser la nouvelle loi de probabilité et non de faire un travail spécialisé en algorithmique.

Cette organisation du travail peut permettre aussi de ne faire que la première partie de l'activité en salle informatique, la suite pouvant être traitée en classe entière en utilisant un vidéo-projecteur.

Fiche professeur

Étape 1 : pour 10 « Pile »

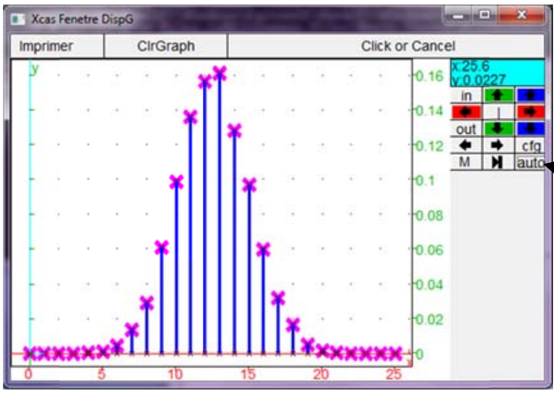
On cherche à conjecturer par simulation la probabilité d'obtenir 10 « Pile » lors de 25 lancers.
On crée un premier programme qui simule 25 lancers d'une pièce bien équilibrée et retournant le nombre de « Pile », puis un deuxième programme appelant le premier et calculant le nombre de fois où l'on obtient 10 « Pile » sur un certain nombre de simulations.
L'utilisation d'un sous-programme permet de séparer les difficultés avec d'une part la simulation de 25 lancers, et d'autre part la réalisation d'un nombre suffisant de simulations afin de pouvoir conjecturer une probabilité.
On reverra au passage la notion de fluctuation d'échantillonnage qui ne permet pas de conclure avec 100 simulations, mais qui permet de le faire avec 10 000 (il est préférable de ne pas faire varier le nombre de simulations afin de ne pas introduire un paramètre supplémentaire qui aurait un rôle perturbateur).

Cette partie correspond aux trois premiers programmes du fichier **piece_0.xws**.

Étape 2 : pour un nombre donné de « Pile »

On passe ensuite de 10 « Pile » à 20 « Pile » ce qui ne pose aucune difficulté : une simple modification de la ligne 10 du programme **repet_lancers** permet de répondre à la question.

On veut ensuite comparer les chances d'obtention de différents nombres de « Pile », ce qui nécessite de disposer de l'ensemble des résultats.
L'outil de programmation le plus approprié est celui des listes, mais son utilisation peut être un peu délicate ; le professeur peut alors fournir aux élèves le fichier **piece_0.xws** afin de pouvoir répondre à la question.
Néanmoins l'affichage en liste des résultats n'est pas très pratique et un diagramme en bâtons est beaucoup plus parlant : il permet de plus de mettre en évidence la forme très particulière de la représentation graphique qui constitue un invariant de la situation étudiée.
On utilise à cet effet le fichier **piece_1.xws**.



Penser à cliquer sur le bouton **auto** afin d'obtenir une visualisation correcte.

Étape3 : on modifie les paramètres de la loi

On modifie d'abord le nombre de lancers, puis dans un deuxième temps la valeur de la probabilité en simulant une pièce truquée ; cela se fait facilement par des modifications mineures dans les programmes **lancers** et **repete_lancers**.
Le but est de visualiser l'influence de la modification des paramètres sur la représentation graphique.

Étape 4 : généralisation

À partir d'un programme fourni par le professeur dans lequel le nombre de lancers n et la probabilité p sont variables, il s'agit d'amener les élèves à voir ce que représentent les paramètres n et p, puis d'utiliser ce programme général afin de traiter différentes situations.

Étape 5 : autres situations

Le but est de montrer que l'on peut utiliser cet algorithme pour conjecturer des probabilités dans des situations différentes après avoir analysé en quoi elles sont semblables à la situation de référence.

Remarque :

Il peut être intéressant de présenter aux élèves, une fois la loi binomiale institutionnalisée, le fichier **loi_binomilale.xws** afin de montrer que les simulations réalisées donnaient une bonne approximation des probabilités réelles.

Fiche élève

On lance plusieurs fois une pièce et on s'intéresse à la probabilité d'obtenir un nombre donné de « Pile ».

On lance 25 fois la pièce

Pour 10 « Pile »

1) Dans une session XCas créer un premier programme nommé « **lancer()** » simulant 25 lancers d'une pièce bien équilibrée et retournant le nombre de « Pile ».
2) Créer un deuxième programme nommé « **repete_lancers()** » appelant le programme précédent et calculant le nombre de fois où l'on obtient 10 « Pile » lors de 100 simulations des 25 lancers ainsi que la fréquence d'obtention de 10 « Pile ».
3) Exécuter plusieurs fois ce programme.
   Peut-on conjecturer la probabilité d'obtenir 10 « Pile » sur 25 lancers ?

4) Recommencer avec 10 000 simulations et conjecturer la probabilité d'obtenir 10 « Pile » sur 25 lancers.

Pour un nombre donné de « Pile »

1) Sur 25 lancers a-t-on plus de chances d'obtenir 20 « Pile » que 10 « Pile » ?
2) Quel est le nombre de « Pile » que l'on a le plus de chances d'obtenir sur 25 lancers ?
3) On veut pouvoir faire afficher simultanément les fréquences d'obtention des différents nombres de « Pile » possibles afin de pouvoir les comparer.
   Pour cela on utilise deux variables de type liste qui permettent de lister le nombre de fois où l'on obtient k boules blanches, et la fréquence correspondante, avec k variant de 0 à n.
   Méthode :

On déclare les variables R et F	**local** R, F;
On initialise les listes vides R et F (ceci a pour effet de donner à R et F le statut de liste)	R:=[]; F:=[];
On définit la taille de la liste et on crée ses différents éléments en les initialisant à 0	**pour** *k* **de** 0 **jusque** *n* **faire** R[k] := 0; F[k] := 0; **fpour**
On peut ensuite à l'aide d'une boucle **pour** effectuer les 10 000 simulations et modifier l'élément R[k] à chaque fois que l'on obtient *k* boules blanches.	
On peut ensuite à l'aide d'une boucle **pour** affecter à chacun des éléments F[k] de la liste le calcul de la fréquence d'obtention de *k* boules blanches.	

   Modifier l'algorithme afin de faire afficher simultanément les fréquences d'obtention des différents nombres de « Pile » possibles.

4) Les réponses précédentes semblent-elles se confirmer ?
5) Commenter la répartition des fréquences obtenues.

6) Fermer la session et ouvrir le fichier « **piece_1.xws** » ; compiler les deux programmes et exécuter le programme « **repete_lancers** » de manière à visualiser graphiquement la répartition des fréquences.

Introduction de la loi binomiale

On change le nombre de lancers

1) Dans le programme « **lancers** » modifier le nombre de lancers et modifier en conséquence le programme « **repete_lancers** » ; observer la répartition des fréquences.
2) Commenter.
3) Revenir à 25 lancers en effectuant les modifications nécessaires.

On utilise une pièce truquée

1) Modifier le programme « **lancers** » de manière à simuler le lancer d'une pièce truquée qui n'a qu'une chance sur quatre de tomber sur « Pile » ; observer la répartition des fréquences.
2) Commenter.

Cas général

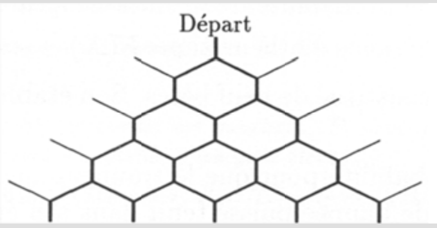
1) Fermer la session et ouvrir le fichier « **piece_2.xws** ».
2) Que fait le programme « **lancers(n,p)** » ?
3) Utiliser cette session pour visualiser :
   a) la répartition des fréquences lors de 25 lancers d'une pièce bien équilibrée ;
   b) la répartition des fréquences lors de 25 lancers d'une pièce truquée qui n'a qu'une chance sur quatre de tomber sur « Pile » ;
   c) la répartition des fréquences lors de 100 lancers d'une pièce bien équilibrée ;
   d) la répartition des fréquences lors de 100 lancers d'une pièce truquée qui n'a qu'une chance sur quatre de tomber sur « Pile ».

D'autres situations

On lance plusieurs fois un dé cubique équilibré.

Peut-on utiliser la session précédente pour conjecturer la probabilité d'obtenir 10 fois le 6 lors de 50 lancers ?

Une chenille processionnaire descend le long d'un grillage. À chaque épissure, elle prend la maille de droite une fois sur trois, celle de gauche deux fois sur trois. Elle descend ainsi quatre niveaux.



G. Frugier - Les probabilités sans les boules

1) Quelle est la probabilité que la chenille ait pris trois fois la maille de droite sur les quatre niveaux ?
2) Quelle est la probabilité que la chenille ait pris trois fois la maille de gauche sur les quatre niveaux ?