Exercice 2

Consigne : Concevoir un énoncé, dans l'esprit des nouveaux programmes concernant la situation suivante :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{u_n + 3}$.
On s'intéresse à l'étude de cette suite.

Nous proposons ici une version comparée de deux énoncés concernant l'étude de cette suite.

Ce type d'exercice ne peut pas être totalement ouvert de par la difficulté de la suite à étudier. Il n'est pas nécessaire non plus de chercher un problème concret s'y ramenant. En dehors d'un cadre concret, il reste encore des objets mathématiques que l'on étudie pour ce qu'ils sont.

Les phases de conjecture sont indispensables dans l'esprit des nouveaux programmes (utilisation des TICE et en particulier l'aspect graphique).

Enoncé initial exercice 2 *(source : Hyperbole Edition 2006 chez Nathan p 219)*

On considère la suite (u_n) définie par

$u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{u_n + 3}$.

1) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5 - \frac{16}{u_n + 3}$.

2) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in [1\,;2]$.

3) Etablir la relation : $u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n - 1)^2}{u_n + 3}$.

En déduire le sens de variation de (u_n).

4) Démontrer que (u_n) converge et déterminer sa limite l.

La question 2 appelle une récurrence assez compliquée d'autant que le travail « technique » sur l'ordre et les inégalités est beaucoup plus restreint dans les nouveaux programmes de lycée.

La fin de la question 4 demande l'utilisation du théorème sur les suites récurrentes convergente qui amène à résoudre l'équation $l = f(l)$ afin de déterminer la valeur de la limite ce qui est hors programme.

Proposition d'énoncé exercice 2:

On considère la suite (u_n) définie par

$u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{u_n + 3}$.

1) Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) ainsi qu'un minorant et un majorant de cette suite.

2) Quel semble être son comportement quand n augmente ?

3) Déterminer la nature de la suite (v_n) définie pour tout n par : $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.

4) Montrer que pour tout n : $u_n = \frac{n + 8}{n + 4}$.

5) Valider les conjectures des questions **1)** et **2)**

Il paraît difficile ici de se dispenser d'un petit côté artificiel que représente l'introduction d'une suite auxiliaire que l'élève ne peut trouver seul dans ce cas.

Dans la question 3, on ne donne pas la nature de la suite auxiliaire, ce qui oblige l'élève à expérimenter puis à choisir une méthode adéquate pour démontrer le résultat.

La question 4 a été introduite afin que l'élève ait le choix de la méthode (raisonnement par récurrence ou utilisation de la suite auxiliaire