Suite récurrente 2

Fiche élève

Somme des termes d'une suite récurrente

Partie A : À préparer à la maison

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 4n + 6$ pour tout entier *n*.

1. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Calculer les sommes $S_0 = u_0, S_1 = u_0 + u_1, S_2 = u_0 + u_1 + u_2$.
4. On note, pour *n* entier naturel quelconque, la somme $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$.
   Calculer S_3, S_4, S_5.

Partie B (avec des listes)

1. Ouvrir le fichier algobox « suite1.alg »
   Exécuter le programme et compléter la deuxième ligne du tableau ci-dessous :

Entier *n*	0	1	2	3	4	5
Résultat						

2. Que fait ce programme ?
3. Modifier ce programme pour vérifier les résultats obtenus avec la suite (u_n) de la partie A.
   Enregistrez le sous le nom « suite2.alg »
4. Compléter le programme « suite2.alg » pour qu'il calcule S_n.
   On utilisera l'opération :
   ALGOBOX_SOMME(nom_de_la_liste,rang_premier_terme,rang_dernier_terme)
5. A l'aide du programme, vérifier les résultats obtenus au A-3) et A-4).
6. Compléter le tableau :

Entier *n*	10	20	30	40	50
Somme					

Suite récurrente 2

Partie C (sans listes)

1. En utilisant une boucle POUR, écrire un nouveau programme qui calcule le terme de rang n de la suite (u_n).

   Enregistrez-le sous le nom « suite3.alg ».
2. Compléter le programme « suite3.alg » pour qu'il calcule S_n.

   (On pourra ajouter une instruction dans la boucle POUR).
3. Exécuter le programme pour vérifier les résultats obtenus en B-6).
4. <u>Pour aller plus loin</u> :

   Déterminer le plus petit entier n tel que la somme S_n soit supérieure à 5×10^6.

   Conjecture : Pour tout réel M (aussi grand soit il), peut on trouver un entier n tel que S_n soit supérieure à M ? (procéder par tests)

Partie D (en classe entière)

1. Formule explicite de u_n en fonction de n :

   En ajoutant, membre à membre les égalités, $u_0 = 1$, $u_1 = u_0 + 4\times 0 + 6$, $u_2 = u_1 + 4\times 1 + 6$, …, $u_n = u_{n-1} + 4\times(n-1) + 6$, montrer que $u_n = u_0 + 4\times(1+2+...+n) + 6n$.

   En déduire que $u_n = 2n^2 + 4n + 1$.

2. Vérifier les résultats obtenus à l'aide d'Algobox.

3. On admet que $1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + ... + n^2 = \dfrac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}$.

   Montrer que $S_n = \dfrac{(n+1)(2n^2+7n+3)}{3}$.

4. Vérifier les résultats obtenus à l'aide d'Algobox.