Nombres de Mersenne

Au XVII[ème] siècle, les mathématiciens ont essayé de trouver des formules générant des nombres premiers. Mersenne s'intéressa aux nombres de la forme $2^m - 1$ et montra qu'il était nécessaire pour qu'il soit premier que m soit premier, délimitant ainsi la recherche des nombres premiers de ce type. Les nombres $M_p = 2^p - 1$, avec p premier, portent le nom de nombres de Mersenne.

La réciproque est fausse. Mersenne a fourni une liste des nombres premiers de ce type jusqu'à $m = 257$. Même si ces nombres ont été étudiés depuis l'Antiquité et que cette liste fut fausse (!), c'est ce fait qui leur a valu de porter son nom.

En effet, $m = 11$ est premier alors que $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$.

Cette propriété des nombres premiers apporte donc plutôt un critère de non-primalité. (tests Xcas)

Théorème : Un diviseur premier positif d'un nombre de Mersenne $2^p - 1$, avec p premier, est toujours de la forme $2\alpha p + 1$ avec $\alpha \in \mathbb{N}$ (voir Odyssée p 75-76)

Ce théorème permet de limiter les calculs. En effet, pour savoir si un nombre de Mersenne $M_p = 2^p - 1$, est premier, on peut se contenter de tester les diviseurs premiers de la forme $2\alpha p + 1$ *avec* $\alpha \in \mathbb{N}$ inférieurs à $\sqrt{M_p}$.

Exemple : Pour tester si M_{13} est premier, il suffit de regarder si il est divisible par les nombres premiers de la forme $26\alpha + 1$ inférieurs à $\sqrt{2^{13} - 1} \approx 90{,}5$. Il n'y a donc que deux nombres à tester : 53 et 79.