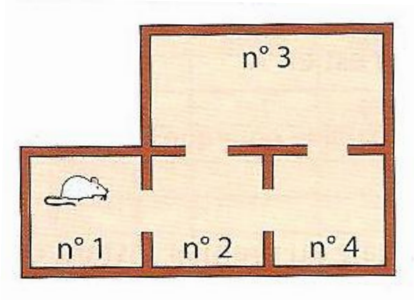
Marches aléatoires

Une situation peut être modélisée par une marche aléatoire lorsqu'un objet considéré peut être dans différents états à un instant n (représentés par les sommets d'un graphe) et que l'on connaît la probabilité de passage d'un état à l'autre. On peut représenter cette situation par une matrice de transition (stochastique par définition).

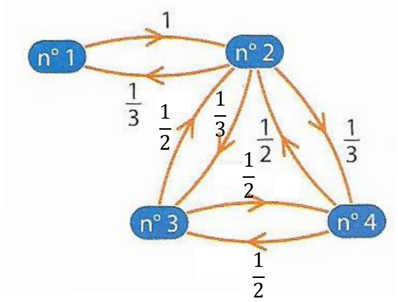
Exemple (source Hyperbole problème 8 p 107) :

Une souris se déplace dans une cage comportant 4 compartiments numérotés de 1à 4 :



Lorsque la souris se trouve dans un compartiment, elle choisit de manière équiprobable une des portes possibles et change de compartiment à chaque étape indépendamment des choix précédents.
Au départ, la souris est dans le compartiment 1.

Graphe probabiliste correspondant :



Matrice de transition correspondante :

On note :

- ✓ 1_n *l'évènement « la souris est dans le compartiment 1 à l'instant* n"
- ✓ 2_n *l'évènement « la souris est dans le compartiment 2 à l'instant* n"
- ✓ 3_n *l'évènement « la souris est dans le compartiment 3 à l'instant* n"
- ✓ 4_n *l'évènement « la souris est dans le compartiment 4 à l'instant* n"

Dans ce cas, on a d'après la formule des probabilités totales :

- ✓ $P(1_{n+1}) = P_{1_n}(1_{n+1})P(1_n) + P_{2_n}(1_{n+1})P(2_n) + P_{3_n}(1_{n+1})P(3_n) + P_{4_n}(1_{n+1})P(4_n)$
- ✓ $P(2_{n+1}) = P_{1_n}(2_{n+1})P(1_n) + P_{2_n}(2_{n+1})P(2_n) + P_{3_n}(2_{n+1})P(3_n) + P_{4_n}(2_{n+1})P(4_n)$
- ✓ $P(3_{n+1}) = P_{1_n}(3_{n+1})P(1_n) + P_{2_n}(3_{n+1})P(2_n) + P_{3_n}(3_{n+1})P(3_n) + P_{4_n}(3_{n+1})P(4_n)$
- ✓ $P(4_{n+1}) = P_{1_n}(4_{n+1})P(1_n) + P_{2_n}(4_{n+1})P(2_n) + P_{3_n}(4_{n+1})P(3_n) + P_{4_n}(4_{n+1})P(4_n)$

Deux possibilités pour écrire ses égalités sous forme matricielle :

- ✓ *1^er^ cas :*
  Les coefficients$a_{i,j}$ *de la matrice sont les probabilités* $P_{i_n}(j_{n+1})$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

*On a donc $L_{n+1} = L_n A$ en appelant L_n le vecteur **ligne** $(P(1_n) \quad P(2_n) \quad P(3_n) \quad P(4_n))$*
Ainsi $L_n = L_0 A^n$, ce qui permet de prévoir les probabilités d'être dans un état donné au bout de n étapes.
*Remarque : Cette matrice est dite **stochastique** car la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1.*

- ✓ *2nd cas :*

Les coefficientsb$_{i,j}$ de la matrice sont les probabilitéss $P_{j_n}(i_{n+1})$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

*Remarque : Cette matrice est dite **stochastique** car la somme des coefficients de chaque colonne vaut 1.*

*On a donc $C_{n+1} = BC_n$ en appelant C_n le vecteur **colonne** $\begin{pmatrix} P(1_n) \\ P(2_n) \\ P(3_n) \\ P(4_n) \end{pmatrix}$*

Ainsi $C_n = B^n C_0$, ce qui permet de prévoir les probabilités d'être dans un état donné au bout de n étapes.

Remarque : On peut aussi considérer la variable aléatoire X_n, qui à l'instant n prend la valeur i si la souris et dans le compartiment $n°\ i$, $i \in [\![1\,;4]\!]$. Le vecteur L_n (ou C_n) contient alors la loi de probabilité de la variable aléatoire X_n c'est-à-dire

$L_n = (P(1_n) \quad P(2_n) \quad P(3_n) \quad P(4_n)) = (P(X_n = 1) \quad P(X_n = 2) \quad P(X_n = 3) \quad P(X_n = 4))$

Le cas particulier d'une marche aléatoire sur un segment traite les situations où, à partir d'un sommet, on ne peut aller qu'au précédent ou au suivant (voir problème du collectionneur ou l'urne d'Erhenfest dans le document ressource).

Remarque : Toute la suite de ce document sera traitée avec des matrices lignes (1er cas).

On peut ensuite s'intéresser à ce qui se passe quand n devient grand. Y-a-t-il stabilisation (convergence) ? Si oui, vers quel vecteur ?

Dans ce cadre, on peut chercher de manière explicite A^n :

- ✓ à l'aide d'un logiciel de calcul formel
- ✓ à l'aide d'une diagonalisation **guidée** : la matrice de passage P (voire son inverse P^{-1}) sont données et les élèves vérifient que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale

- ✓ en revenant de manière explicite aux suites (lorsque celles-ci sont particulières, exemple Odyssée 17 p 142)
- ✓ à l'aide de matrices auxiliaires particulières (exemple Odyssée 34 p 144)
- ✓ à l'aide d'une trigonalisation guidée (exemple Math'x p 168)
- ✓ sur des cas particuliers, on peut conjecturer, l'expression de A^n et démontrer le résultat par récurrence (voir document ressource p 19)
- ✓ …

Remarque : L'idée n'est pas de traiter le cas général et il n'est pas exigible des élèves de connaître des méthodes sur ces questions (en particulier concernant la diagonalisation !).

Avec les notations de l'exemple précédent, si cette suite de vecteurs (L_n) convergent (par analogie avec les suites numériques récurrentes), sa limite L vérifie la relation $L = LA$. Certains manuels appellent la résolution de cette équation (d'inconnue le vecteur L) « recherche d'un état stable ». Cela peut évidemment prêter à confusion étant donné que la suite n'est pas forcément convergente (voir Odyssée savoir-faire 3 p 139). Il conviendrait plutôt de dire « recherche d'une suite constante vérifiant la relation $L_{n+1} = L_n A$ » comme écrit dans le programme.

Parmi les solutions de $L = LA$ (dont on est assuré de l'existence car le vecteur nul est toujours solution), il convient de ne conserver que celle dont la somme des coefficients vaut 1 (car L représente une loi de probabilité). Une matrice stochastique a toujours pour valeur propre 1 et le sous-espace propre associé est de dimension 1 (sauf cas très particuliers comme l'identité) donc cette solution existe et est unique.

Remarque : Si cette suite est convergente, la limite ne dépend pas des conditions de départ (c'est-à-dire de L_0).