Modèle proie-prédateur de Volterra

Le mathématicien Volterra a proposé en 1926 un modèle décrivant l'évolution conjointe des sardines et des requins constatée par des pêcheurs de l'Adriatique : les effectifs des deux espèces variaient de façon périodique en fonction du temps, avec la même période mais en étant décalées dans le temps.

Plus généralement, il s'agit de l'étude de l'évolution de deux populations (proies et prédateurs) ayant une incidence l'une sur l'autre.

Les équations vérifiées par ces effectifs sont des équations différentielles (voir le document ressource). Nous ne traiterons ici que le problème discrétisé à l'aide de suites, seule partie au programme.

- ✓ **Mise en équation du problème discrétisé**

On note u_n le nombre de proies et v_n le nombre de prédateurs à l'instant n.

En l'absence de prédateurs, on note a le taux de reproduction des proies entre les instants n et $n+1$. Il est supposé constant dans ce modèle : les proies sont supposées avoir une source illimitée de nourriture et se reproduire si elles ne sont soumises à aucune prédation.

En l'absence des proies, on note c le taux de mortalité des prédateurs entre les instants n et $n+1$. Il est supposé constant dans ce modèle : il représente la mort naturelle des prédateurs.

Le taux de mortalité des proies due aux prédateurs est supposé, dans ce modèle, proportionnel au nombre de prédateurs : b est le coefficient de proportionnalité.

Le taux de reproduction des prédateurs en fonction des proies mangées est supposé, là encore, proportionnel au nombre de proies. d est le coefficient de proportionnalité.

On a donc :

$$\begin{cases} \dfrac{u_{n+1}-u_n}{u_n} = a - bv_n & \text{équation des proies} \\ \dfrac{v_{n+1}-v_n}{v_n} = -c + du_n & \text{équation des prédateurs} \end{cases}$$

La variation du nombre de proies est donnée par sa propre croissance moins le taux de prédation qui leur est appliqué, ce qui donne l'équation des proies.

La variation de la population de prédateurs en tant que croissance de cette population, diminuée du nombre de morts naturelles, ce qui donne l'équation des prédateurs.

On obtient ainsi le système d'équations du modèle de Volterra :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n(1+a-bv_n) \\ v_{n+1} = v_n(1-c+du_n) \end{cases}$$

On peut visualiser l'évolution couplée de ces deux suites à l'aide du tableur, faire varier les paramètres $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}$ et d ainsi que les valeurs initiales u_0 et v_0 (fichier joint).

- ✓ **Linéarisation du problème**

On recherche un couple de suites constantes vérifiant le système précédent pour essayer de trouver un point d'équilibre (valeurs pour lesquelles les effectifs des deux populations restent stables d'une unité de temps à la suivante) autre que $(0\,;0)$. Soient $(U\,;V)$ de telles constantes, on a alors :

$$\begin{cases} U = U(1 + a - bV) \\ V = V(1 - c + dU) \end{cases}$$

Soit $\begin{cases} U = \dfrac{c}{d} \\ V = \dfrac{a}{b} \end{cases}$ (b et d sont évidemment non nuls dans ce modèle)

Le couple $(\mathrm{U}\,;\mathrm{V})$ s'appelle point d'équilibre. Il est alors intéressant d'observer dans quelle mesure des valeurs initiales choisies proches ce couple font varier les effectifs des deux populations à l'aide du fichier tableur.

On s'intéresse au couple de suites auxiliaires $\big((t_n)\ ;\ (s_n)\big)$ définies pas :

$$\begin{cases} t_n = u_n - \dfrac{c}{d} \\ s_n = v_n - \dfrac{a}{b} \end{cases}$$

On obtient un nouveau système :

$$\begin{cases} t_{n+1} = t_n - \dfrac{\mathrm{bc}}{\mathrm{d}} s_n - b t_n s_n \\ s_{n+1} = \dfrac{ad}{b} t_n + s_n + d t_n s_n \end{cases}$$

Si on est proche du point d'équilibre au départ, alors $(t_0\ ;\ s_0)$ est proche de $(0\,;0)$ et on peut observer avec le fichier tableur précédent que les termes $b\mathrm{t_n}s_n$ et dt_ns_n sont négligeables devant les autres termes. Le système devient alors

$$\begin{cases} t_{n+1} = t_n - \dfrac{\mathrm{bc}}{\mathrm{d}} s_n \\ s_{n+1} = \dfrac{ad}{b} t_n + s_n \end{cases}$$

Le système est alors linéaire et peut s'écrire sous forme matricielle, ce qui permet d'expliciter les suites u_n et v_n.