Proposition de progression

1) Le philatéliste

En amont (exercice de type brevet pour démarrer)

Un philatéliste possède 226 709 timbres français et 129 548 timbres étrangers. Il souhaite vendre toute sa collection en faisant des lots identiques, c'est-à-dire comportant le même nombre de timbres français et étrangers dans chaque lot.
Comment peut-t-il s'y prendre ?

Contenus (*réactivation et/ou amorce*)

- *diviseurs*
- *nombres premiers*
- *décomposition en produit de facteurs premiers*
- *diviseur commun*
- *PGCD*

Exemples de commandes Xcas

Instructions utiles TICE

En aval

- algorithme de recherche des diviseurs, des diviseurs premiers
- *Enigme : Un facteur donne son courrier à un professeur de maths. Il discute de la pluie et du beau temps, puis le professeur propose un petit problème au facteur:*
  "J'ai trois filles. La somme de leurs âges est égal au numéro de la maison d'en face. Le produit de leurs âges est égal à 36. Quel est l'âge de mes filles?"
  Le facteur répond: "Il me manque une information pour pouvoir répondre."
  Le professeur: "Vous avez raison, la voici: mon aînée est blonde."
  Et le facteur lui donne l'âge de ses filles. Pas bête le facteur!
  Au fait, quel est l'âge de ses filles ?
- autres tests de primalité (nombres de Fermat (annexe 1), nombres de Mersenne (annexe 2) pour améliorer la recherche de grands nombres premiers → pertinence, infinitude, utilité
- autre utilité du PGCD pour fractions irréductibles

2) Les Codes-Barres (annexe 3)

En amont

- découverte du principe
- calcul de la clé
- vérification de la cohérence du code-barre

Contenus

- *cas général de la division euclidienne*
- *remarquer que les diviseurs de a et de b sont les mêmes que ceux de b et de r → autre méthode pour trouver les diviseurs communs à 2 nombres (sur un exemple) et en particulier le PGCD→algorithme d'Euclide + justification qu'on retrouve bien le PGCD*

En aval

- montrer que $\frac{3n+2}{6n+5}$ est toujours irréductible

3) Exemples de stockage de données (problèmes du document ressources p 6 à 10)

En amont

- étude de l'évolution de deux populations (suites imbriquées traitables dans un 1er temps sans matrice - tableur, suite auxiliaire -)
- gestion de production
- indice des prix
- « déshabillage » d'un tableau pour en faire une matrice (source : Charles Mellies, professeur dans l'académie de Nice)

Contenus

- *écriture matricielle et définition du produit en lien avec le problème*
- *somme de matrices, multiplication par un scalaire en lien avec le problème*
- *exemple de matrice non carrée et multiplication d'une matrice par un vecteur*

En aval

- 1er modèle proies-prédateurs linéaire avec matrice 2×2 → exemple de calcul de la puissance $n^{ième}$ d'une matrice d'ordre 2
- modèle de diffusion d'Erhenfest (source : Charles Mellies, professeur dans l'académie de Nice)
  - Activité d'entrée avec simulation
  - principe général
  - à 2 boules → 1ère marche aléatoire sur un segment à 3 sommets (matrice 3×3)

4) Chiffrement affine (annexe 4)

En amont

- introduction du principe
- codage
- décodage : condition (nécessaire, suffisante) pour avoir un codage valide permettant le décodage, recherche d'un « inverse modulo n »

Contenus

- *congruences*
- *théorème Bézout*

En aval

- chiffrement de Vigenère (annexe 5)
- nombres de Carmichael (ne pas tout traiter !)(annexe 6)

5) Chiffrement de Hill (annexe 7)

En amont

- introduction du principe
- codage
- décodage : condition (nécessaire, suffisante) pour avoir un codage valide permettant le décodage, recherche de l' « inverse modulo n » d'une matrice (matrice permettant le décodage)

Contenus

- *théorème Bezout*
- *inverse d'une matrice*

En aval

- problèmes menant à la résolution d'un système, notamment 3×3 → écriture matricielle d'un système
- autre(s) problème(s) menant au calcul de l'inverse d'une matrice par exemple avec $P(A) = 0$

6) Doudou le Hamster

En amont

Doudou, le hamster paresseux, n'a que trois endroits dans sa cage : les copeaux où il dort, la mangeoire où il mange et la roue où il fait de l'exercice.
Ses journées se ressemblent : toutes les minutes, il peut changer d'activité, ou continuer ce qu'il fait. Doudou n'a aucune mémoire…
- Quand il dort, la probabilité qu'il continue à dormir est 0,9.
- Quand il se réveille, il va manger ou faire de l'exercice, de façon équiprobable.
- Un repas de Doudou ne dure qu'une minute, après il fait autre chose.
- Après avoir mangé, il part dans sa roue avec une probabilité de 0,3 ou retourne dormir.
- Quand il court, il part dormir la minute suivante avec une probabilité de 0,8, sinon il continue de courir en oubliant qu'il est déjà un peu fatigué.

1. Déterminer la matrice de transition de ce système.

2. Initialement, Doudou dort. Quelle est la probabilité que, 2 minutes plus tard, Doudou dorme encore ? Qu'il mange ? Qu'il court ?

3. a. À l'aide d'une calculatrice, calculer M^{20}, M^{30}, M^{40}, M^{100}. Quelle conjecture peut-on faire sur la suite de matrices (M^n) ? On admet ce résultat.

b. Avec ce modèle, à long terme, quel sera le temps de sommeil probable de Doudou chaque jour ?

(Math'x spécialité 18 p 178)

- marche aléatoire sur un graphe à 3 sommets (sans étude asymptotique sauf éventuellement en terme de conjecture)

Contenus

- *écriture matricielle d'un système linéaire*
- *calcul de M^n avec la calculatrice et/ou logiciel de calcul formel pour des valeurs fixées de n (exemples Xcas)*

En aval

- travail sur la relation entre systèmes et matrices (source : Charles Mellies, professeur dans l'académie de Nice)
- marche aléatoire sur un triangle (calcul de M^n grâce, par exemple, à un polynôme en M)
- étude d'une suite de type Fibonacci (linéaire récurrente d'ordre 2)

7) Clé RIB (annexe 8)

En amont

- principe du calcul
- lien avec les codes-barres déjà vus
- généralisation du principe d'une clé de vérification (erreur sur un chiffre détectée, pas forcément sur 2)

Contenus

- *théorème de Gauss*

En aval

- code ISBN (annexe 9)
- code INSEE (annexe 10)

8) Publicité mensongère ?

En amont

62 Trois sortes d'images sont réparties en proportions égales dans des boîtes de céréales. Un inspecteur des fraudes, ayant observé ce qui se passait pour 1 000 personnes achetant chaque semaine une boîte de céréales et voyant qu'au bout de 12 semaines, 15 personnes n'avaient que deux des trois images, a déclaré mensongère la publicité : « les images sont également réparties dans les paquets ».
On se propose de vérifier si cette affirmation est vraie.

On considère donc 1 000 personnes qui, chaque semaine, achètent exactement une boîte. Au bout d'une semaine, elles auront toutes une image. L'état E_n du système la n-ième semaine est une matrice ligne $X_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$, où a_n est le nombre de personnes ayant une seule sorte d'images, b_n est le nombre de personnes ayant exactement deux images distinctes et c_n est le nombre de personnes ayant les trois images.

Quand on a une seule image, la probabilité d'en tirer une nouvelle est $\frac{2}{3}$; quand on a deux sortes d'images, la probabilité de tirer la troisième sorte est $\frac{1}{3}$.

1. À quoi est égale la matrice X_1 ?

2. Écrire la matrice de transition M de cette marche aléatoire.

3. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer P^{-1}, puis la matrice $D = P^{-1}AP$.

4. Déterminer D^n, puis M^n en fonction de n.

5. En déduire X_n en fonction de n.

6. Quelle est la limite de la suite (X_n) ? L'interpréter.

7. Au bout de combien de semaines peut-on considérer que toutes les personnes ont les trois images ?

(*Indice spécialité 62 p 128)*

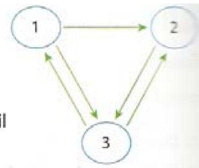
- marche aléatoire (annexe 11) → matrice stochastique

Contenus

- *calcul de la puissance $n^{\text{ième}}$ d'une matrice carrée d'ordre 2 ou 3 (exemples Xcas)*

En aval

Étude asymptotique d'une marche aléatoire



Énoncé Un mini réseau internet comprend trois pages web : 1, 2 et 3. Les liens sont indiqués dans le graphe ci-contre. Un surfeur aléatoire surfe indéfiniment sur ce réseau. À chaque clic il choisit de façon équiprobable un des liens présents sur la page.
Après n clics, on note X_n la variable aléatoire donnant la page sur laquelle se trouve le surfeur et P_n la matrice ligne $(P(X_n = 1) \;\; P(X_n = 2) \;\; P(X_n = 3))$.

1 Écrire la matrice $(p_{i,j})$ où $p_{i,j}$ désigne la probabilité, étant à la page i, d'aller à la page j ($1 \leqslant i, j \leqslant 3$).

2 Exprimer P_n en fonction de M et de P_0.

3 Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. On admet que P est inversible et que $P^{-1} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 4 & 8 & 6 \\ 8 & -2 & -6 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Calculer le produit $Q = P^{-1}MP$ et montrer que $Q = D + T$, où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}5 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b. Calculer T^2. Montrer que $DT = TD = -0{,}5T$. Montrer que $D^nT = (-0{,}5)^nT$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

c. Démontrer, par récurrence, que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $Q^n = D^n + n(-0{,}5)^{n-1}T$.

d. Démontrer que $M = PQP^{-1}$ et en déduire l'expression de M^n en fonction de P et Q.

e. Déterminer la limite de la suite (Q^n) et celle de (M^n) quand n tend vers $+\infty$.

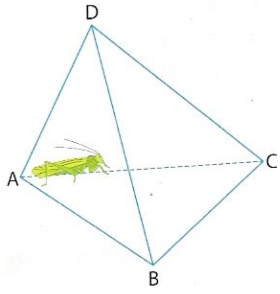
4 Exprimer la limite de la suite (P_n) et justifier qu'elle ne dépend pas de l'état initial. Quelle est la page web qui est atteinte avec la probabilité la plus grande par le surfeur aléatoire après un très grande nombre de clics ?

(Math'x spécialité 18 p 168)

9) Une sauterelle dans une cage tétraédrique

En amont

Une sauterelle dans une cage tétraédrique



Une sauterelle se déplace toutes les minutes d'un sommet à l'autre de sa cage qui a la forme d'un tétraèdre.
Elle reste exactement une minute au même endroit.
Quand elle est au sommet A, elle a autant de chances d'aller sur les trois autres sommets.

Quand elle est au sommet B, elle ne se rend que sur les sommets A et D, de façon équiprobable.
Quand elle est au sommet C, elle ne se rend que sur les sommets A et B, et elle choisit A avec une probabilité égale à $\frac{1}{3}$.
Quand elle est au sommet D, elle choisit A, B ou C avec les probabilités respectives $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{4}$. À l'instant 0 où on met la sauterelle dans sa cage, celle-ci se trouve en A.

1. Quelle est la probabilité que la sauterelle se trouve en B après une minute ? après deux minutes ?

2. On note A_n l'événement « la sauterelle est au sommet A au bout de n minutes ».
Les événements B_n, C_n et D_n sont définis de façon similaire.
a. À l'aide d'un arbre de probabilités, exprimer $P(A_{n+1})$ en fonction de $P(A_n)$, $P(B_n)$, $P(C_n)$ et $P(D_n)$.
b. Exprimer de même $P(B_{n+1})$, $P(C_{n+1})$ et $P(D_{n+1})$ en fonction de $P(A_n)$, $P(B_n)$, $P(C_n)$ et $P(D_n)$.

3. On note X_n la matrice ligne $(P(A_n) \;\; P(B_n) \;\; P(C_n) \;\; P(D_n))$.
Déterminer la matrice carrée M telle que $X_{n+1} = X_n \times M$.

4. Avec une calculatrice ou un logiciel, calculer M^2, M^{10} et M^{60}.

5. Quelle est la probabilité que la sauterelle soit en A au bout de dix minutes ? au bout d'une heure ?

6. Que constate-t-on ? Interpréter ce résultat.

7. Résoudre l'équation $X = XM$, dont l'inconnue est $X = (x \;\; y \;\; z \;\; t)$, avec $x + y + z + t = 1$.

8. **Interpréter les résultats.**

(Indice spécialité 6 p 117)

Contenus

- *étude asymptotique d'une marche aléatoire (annexe 11)*
- *recherche d'une suite constante vérifiant la relation $U_{n+1} = AU_n$ (annexe 11)*

En aval

Exercice 50 **Concurrence** *(D'après un sujet du concours PLP)*

Trois marques X, Y et Z d'un dentifrice occupent un secteur de consommation.
Chaque mois, les consommateurs de la population étudiée utilisent une et une seule de ces marques.
Soit n un entier naturel. Pour un consommateur pris au hasard, on désigne par X_n (respectivement Y_n ou Z_n) l'évènement : « La marque X (respectivement Y ou Z) est utilisée au cours du n-ième mois ».
Les probabilités des événements X_n, Y_n et Z_n sont respectivement notées x_n, y_n et z_n.
Au cours du mois d'essai ($n = 0$), on a observé les valeurs initiales : $x_0 = 0{,}1$, $y_0 = 0{,}2$ et $z_0 = 0{,}7$.
D'autre part, par sondage, on a pu déterminer les intentions des consommateurs que l'on supposera constantes.
La probabilité, pour un consommateur ayant utilisé la marque X au cours du mois n, d'adopter la marque X (respectivement Y ou Z) au cours du mois suivant est 0,4 (respectivement 0,3 et 0,3).
La probabilité, pour un consommateur ayant utilisé la marque Y au cours du mois n, d'adopter la marque X (respectivement Y ou Z) au cours du mois suivant est 0,3 (respectivement 0,4 et 0,3).
La probabilité, pour un consommateur ayant utilisé la marque Z au cours du mois n, d'adopter la marque X (respectivement Y ou Z) au cours du mois suivant est 0,2 (respectivement 0,1 et 0,7).

1. Pour tout entier naturel n, exprimer x_{n+1}, y_{n+1} et z_{n+1}, en fonction de x_n, y_n et z_n.

2. On considère les matrices :
$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix},\ U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}.$$
Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $U_{n+1} = AU_n + B$.

3. On désigne par I la matrice unité de taille 2.
a. Montrer que la matrice $I - A$ est inversible.
b. Déterminer une matrice C telle que $C = AC + B$.

4. Pour tout entier naturel n, on pose $V_n = U_n - C$.
Pour tout entier naturel n, démontrer que, $V_n = A^n V_0$.

5. **a.** Vérifier à l'aide d'une calculatrice que :
$$A = P\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0{,}1 \end{pmatrix}P^{-1} \text{ où } P = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$
En déduire que, pour tout entier naturel n :
$$A^n = P\begin{pmatrix} 0{,}4^n & 0 \\ 0 & 0{,}1^n \end{pmatrix}P^{-1}.$$
b. Que peut-on dire des coefficients de la matrice A^n lorsque n tend vers $+\infty$?
c. Que conclure de l'utilisation, à long terme, des marques X, Y et Z ?

(Odyssée spécialité 50 p 155)

- étude d'une éventuelle convergence par calcul de M^n par diagonalisation guidée (étude asymptotique d'une marche aléatoire)

10) Hôpital

En amont

Un hôpital se compose de 4 services : Soins réguliers, Chirurgie, Soins intensifs.

Le tableau suivant donne les probabilités de passage d'un service à l'autre dans un intervalle de 24 heures (probabilités obtenues grâce aux fréquences observées sur une longue période) :

	Soins réguliers	Chirurgie	Soins intensifs	Sortie
Soins réguliers	0,6	0,2	0	0,2
Chirurgie	0,1	0	0,8	0,1
Soins intensifs	0,5	0	0,33	0,17
Sortie	0	0	0	0

Par exemple, un malade se trouvant un jour en soins réguliers a la probabilité 0,6 d'y rester, la probabilité 0,2 de se trouver le lendemain en chirurgie et la probabilité 0,2 de sortir le lendemain.

Supposons qu'un jour 10 patients soient admis en soins réguliers et qu'aucun malade ne soit en cours de traitement. Supposons de plus que 10 patients soient admis chaque jour.

Combien de patients y aura-t-il dans chaque service 8 jours plus tard ?

Contenus

- *marche aléatoire sur graphe à 3 sommets*
- *étude de la convergence d'une suite vérifiant* $U_{n+1} = AU_n + B$

COMPLEMENTS

- Modèle proies-prédateurs de Voltera (non linéaire) (annexe 12)
- Codage RSA (annexe 13)
- Modèle d'Erhenfest avec n particules-temps de retour moyen (document ressource p 52)
- Calcul de la pertinence d'une page web (document ressource p 20)
- Exemple du collectionneur (document ressource p 49)