Cahier d'exercices d'arithmétique (collège)
2 - Diviseurs d'un entier naturel

Françoise Bastiat, Michel Bénassy, Pierre Roques
Equipe académique Mathématiques
Bordeaux, 11 juin 2001

I. Approche de la définition de diviseur d'un entier naturel

6^{eme}

1) Compléter : $12 \times 7 = \ldots\ldots$; $12 = 4 \times \ldots\ldots$.
   En utilisant uniquement les cinq nombres figurant dans les calculs ci-dessus, compléter :
   …….. est un multiple de 12 ; 12 est un diviseur de ……… ;
   …… et …… sont des diviseurs de 12 .

2) Vérifier que : $31 \times 37 = 1147$. Sans poser d'opération, compléter :
   $62 \times 74 = \ldots\ldots\ldots$; $4 \times \ldots\ldots\ldots = 4588$; $31 \times \ldots\ldots\ldots = 4588$.

   En déduire :
   - un multiple de 74 ;
   - un multiple de 31.
   - un diviseur de 4588 inférieur à 100.
   - un diviseur de 4588 supérieur à 100.
   - un diviseur impair de 4588.

II. Ensemble des diviseurs d'un entier naturel (approche)

6^{eme}

1) Rechercher toutes les façons possibles d'écrire 20 sous la forme du produit de deux entiers naturels. En déduire la liste de tous les diviseurs de 20.

2) Établir :
   – la liste des diviseurs de 60 ;
   – la liste des diviseurs de 49 ;
   – la liste des diviseurs de 13.

III. Ensemble des diviseurs d'un entier naturel

4^{eme}

1) Établir la liste des seize diviseurs de 216.

2) Citer :
   - un entier naturel qui a exactement quatre diviseurs et préciser ces diviseurs ;
   - un entier naturel qui a exactement trois diviseurs et préciser ces diviseurs.

3) L'entier naturel 7 a pour seuls diviseurs 1 et 7.
   Terminologie : On appelle nombre premier un nombre entier naturel qui possède exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.
   Le nombre 7 est donc un entier naturel premier.

   Citer plusieurs entiers naturels premiers.

4) Les diviseurs de l'entier naturel 6 sont : 1, 2, 3 et 6. On remarque : 1 + 2 + 3 = 6.
   Terminologie : On appelle nombre parfait un nombre entier naturel qui est égal à la somme de tous ses diviseurs autres que lui-même.
   Le nombre 6 est donc un nombre parfait.

   Les entiers naturels 15, 28 et 496 sont-ils des nombres parfaits ?

IV. *Propriétés des diviseurs d'un (ou de plusieurs) entier(s) naturel(s)*

3^{eme}

1) Vérifier que : $39 \times 16 = 324$.
   En déduire, sans poser d'opération, que 4 et 13 sont des diviseurs de 324.

2) L'entier 13 est-il un diviseur de la somme 26000 +13 ?
   L'entier 12 est-il un diviseur de la différence $144 \times 10^5 - 240$?

3) Démontrer que :
   « si un entier naturel est un diviseur commun à deux entiers,
   alors il est aussi un diviseur de leur somme ».
   La réciproque de cette propriété est-elle vraie ?

V. *Recherche de diviseurs d'entiers naturels*

3^{eme}

Placer dans les neuf cases du tableau ci-contre les nombres entiers de 1 à 9 de façon à ce que les produits des trois facteurs de chaque ligne et de chaque colonne soient égaux aux nombres indiqués.

			► 54
			► 160
			► 42
▼ 56	▼ 90	▼ 72	

VI. *Curiosités*

3^{eme}

Rappels: *écriture d'un nombre entier naturel en système décimal.*

Exemples : 3 456 *est l'écriture décimale du nombre :* $1\,000 \times 3 + 100 \times 4 + 10 \times 5 + 1 \times 6$;
22 079 *est l'écriture décimale du nombre :* $10\,000 \times 2 + 1\,000 \times 2 + 10 \times 7 + 1 \times 9$.

Notation : a , b , c et d *désignant des entiers naturels inférieurs ou égaux à* 9
et a *étant de plus non nul,*
$\overline{abcd}$ *est l'écriture décimale du nombre :* $1\,000 \times a + 100 \times b + 10 \times c + 1 \times d$.

1) Calculer : $13 \times 11 \times 7 =$............ .
   Compléter : $325\,325 = 325 \times$......... .
   En déduire, sans poser d'opération, que : 13, 77 et 143 sont des diviseurs de 325 325.
   Proposer d'autres nombres de six chiffres divisibles par 13, 77 et 143.

2) Démontrer que 1 001 est un diviseur de tout entier du type : $\overline{abcabc}$.
   En déduire que 91 est un diviseur de tout entier du type : $\overline{abcabc}$.

3) Trouver un diviseur de cinq chiffres de tout nombre du type : $\overline{ababab}$ (tels 121212 ou 737373).
   En déduire d'autres diviseurs de tout nombre du type : $\overline{ababab}$.

VII. Utilisation des critères de divisibilité

6

1) Trouver le chiffre manquant pour que l'entier 1 4 2 □ soit divisible par 3 et 5.
   Est-il alors divisible par 9 ?
2) Avec les chiffres 1, 5 et 8 composer un nombre de trois chiffres divisible par 2 et par 7.
3) Quel est le plus petit entier divisible par 3 dont l'écriture ne comporte que le chiffre 9 ?
   Quel est le plus petit entier divisible par 9 dont l'écriture ne comporte que le chiffre 3 ?
4) Quel est le plus grand entier divisible par 2, par 3 et par 5 dont l'écriture comporte exactement quatre chiffres tous différents ?
   Quel est le plus petit entier divisible par 9, non divisible par 2, non divisible par 5, dont l'écriture comporte trois chiffres tous différents ?
5) Parmi les entiers : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9, trouver ceux qui ont un ou plusieurs multiples s'écrivant uniquement avec le chiffre 1.

VIII. Critères de divisibilité

3

Terminologie : *p désignant un entier naturel non nul, un « critère de divisibilité par p » est une propriété caractéristique des entiers naturels qui sont divisibles par p.*

Exemple : *critère de divisibilité par 10* :

- *Si un nombre entier est divisible par 10, alors, dans son écriture en système décimal, le chiffre des unités est 0.*
- *Si, dans l'écriture en système décimal d'un nombre entier, le chiffre des unités est 0, alors ce nombre est divisible par 10.*

1) Divisibilité par 2 et divisibilité par 5

Observation : 12 568 = $\underbrace{1\,256\times10}_{\text{multiple de 2 et de 5}}+8$.

Critères : Rappeler le critère de divisibilité par 2, puis le critère de divisibilité par 5, connus depuis la classe de Sixième.

Justification : En écrivant un nombre entier naturel n sous la forme : $n=10\times d+u$, justifier les critères énoncés.

2) Divisibilité par 4 et divisibilité par 25

Observation : 53 724 = $\underline{537\times100}+24=\underbrace{537\times4\times25}_{\text{multiple de 4 et de 25}}+24$.

Critères : Énoncer un critère de divisibilité par 4, puis un critère de divisibilité par 25.

Justification : En écrivant un nombre entier naturel n sous la forme : $n=100\times c+10\times d+u$, justifier les critères énoncés.

3) Divisibilité par 8 et divisibilité par 125

Observation : $1\,000=8\times125$.
Critères : Énoncer un critère de divisibilité par 8, puis un critère de divisibilité par 125.
Justification : Démontrer les critères énoncés.

Application : - Citer tous les entiers naturels inférieurs ou égaux à 1 000 qui sont divisibles par 125.
- Parmi les nombres suivants : 7 248, 23 486, 888 188 et 13 104, quels sont ceux qui sont divisibles par 8 ?

4) Divisibilité par 3 et divisibilité par 9

Piste :

$$5\,271 = 5\times 1\,000 + 2\times 100 + 7\times 10 + 1$$
$$5\,271 = 5\times(999+1) + 2\times(.........) + 7\times(........) + 1$$
$$5\,271 = 5+2+7+1+\underbrace{(...)}_{\text{multiple de 9 et de 3}}.$$

Critères : Rappeler le critère de divisibilité par 9, puis le critère de divisibilité par 3 connus depuis la classe de Sixième.

Justification : Démontrer les critères énoncés dans le cas d'un entier de cinq chiffres s'écrivant $\overline{abcde}$ (en système décimal).

5) Divisibilité par 11

Ce paragraphe suppose que la notion de division euclidienne ait été revue.

Préambule :

- Soit a un entier dont le reste dans la division euclidienne par 11 est égal à 1.
  Soit b un entier dont le reste dans la division euclidienne par 11 est égal à 1.
  Démontrer que le reste du produit $a\times b$ dans la division euclidienne par 11 est égal à 1.

  Quel est le reste de 10^2 dans la division par 11 ?
  Quel est le reste de 10^4 dans la division par 11 ?
  Plus généralement quel est le reste dans la division par 11 de 10^p (où p est un entier pair) ?
  En déduire que 11 est un diviseur de $10^2 - 1$, de $10^4 - 1$ et, plus généralement, de $10^p - 1$ (où p est un entier pair).

- Soit a un entier dont le reste dans la division euclidienne par 11 est égal à 1.
  Soit c un entier dont le reste dans la division euclidienne par 11 est égal à 10.
  Démontrer que le reste du produit $a\times c$ dans la division euclidienne par 11 est égal à 10.
  Quel est le reste de 10^1 dans la division par 11 ?
  Quel est le reste de 10^3 dans la division par 11 ?
  Plus généralement quel est le reste dans la division par 11 de 10^i (où i est un entier impair) ?
  En déduire que 11 est un diviseur de $10^1 + 1$, de $10^3 + 1$ et, plus généralement, de $10^i + 1$ (où i est un entier impair).

Observation :

$$262\ 449 = 2\times 100\ 000 + 6\times 10\ 000 + 2\times 1\ 000 + 4\times 100 + 4\times 10 + 9$$
$$262\ 449 = 2\times(100\ 001-1)+6\times(9\ 999+1)+2\times(1\ 001-1)+4\times(99+1)+4\times(11-1)+ 9$$
$$262\ 449 = \underbrace{2\times 100\ 001+6\times 9\ 999+2\times 1\ 001+4\times 99+4\times 11}_{\text{multiple de 11}} + (9-4+4-2+6-2).$$

Critère : Énoncer un critère de divisibilité par 11.

Justification : Démontrer le critère énoncé dans le cas d'un entier de cinq chiffres s'écrivant $\overline{abcde}$ (en système décimal).

Application : Parmi les nombres suivants : 640 574, 353 619, 4 973 933 et 9 080 709, quels sont ceux qui sont divisibles par 11 ?