Cahier d'exercices d'arithmétique (collège)
4 - Diviseurs communs à deux entiers. PGCD

Françoise Bastiat, Michel Bénassy, Pierre Roques
Equipe académique Mathématiques
Bordeaux, 11 juin 2001

I. Approche pragmatique de la notion de PGCD

3^{eme}

1) Établir la liste de tous les diviseurs de 36, puis la liste de tous les diviseurs de 60.
Quels sont les diviseurs communs à 36 et 60 ?
Quel est le plus grand diviseur commun à 36 et 60 ?

2) Une fleuriste dispose de 75 roses et de 90 œillets.
En utilisant toutes ses fleurs, peut-elle composer cinq bouquets identiques ?
Six bouquets identiques ?
Quel est le plus grand nombre de bouquets identiques qu'elle peut composer en utilisant toutes ses fleurs ? Combien de roses et combien d'œillets comptera alors chaque bouquet ?

3) Déterminer le PGCD de : 9 et 15 ; 15 et 18 ; 11 et 36 ; 15 et 28 ; 1 236 000 007 et 0 ; 264 et 110.

   Trouver une relation entre :
   - le PGCD de 9 et 15, et le PGCD de 36 et 60 ;
   - le PGCD de 15 et 18, et le PGCD de 75 et 90.

   Soit a et b deux entiers naturels (non tous les deux nuls) dont le PGCD est Δ.
   Soit k un entier naturel non nul.
   Quelle conjecture peut-on formuler concernant le PGCD Δ' de $k \times a$ et $k \times b$?

4) Quel est le PGCD de 25 et 75 ?

   Soit a un nombre entier naturel non nul et b un multiple de a.
   Démontrer que le PGCD de a et b est égal à a.

5) On veut planter des arbres autour d'un terrain rectangulaire dont la longueur mesure 264 m et la largeur 60 m.
Pour cela, un arbre est planté à chaque sommet du rectangle et les autres sont régulièrement espacés sur les quatre côtés du terrain.
Sachant que la distance entre deux arbres consécutifs est mesurée par un nombre entier de mètres, calculer le nombre minimum d'arbres nécessaires à cette plantation.

II. Utilisation des algorithmes de recherche du PGCD de deux entiers

3^{eme}

1) En utilisant l'algorithme des différences, retrouver le PGCD de : 36 et 60 ; 11 et 36 ; 25 et 75.

2) Retrouver le PGCD de 264 et 110 en utilisant l'algorithme des différences, puis l'algorithme d'Euclide.
Comparer, sur cet exemple, le nombre d'étapes nécessaires dans chacun des deux processus.
Expliquer en quoi le deuxième est un « raccourci » du premier.

3) En utilisant l'algorithme des différences, calculer le PGCD de 455 et 335.
Peut-on prévoir le nombre d'étapes que l'algorithme d'Euclide permet « d'économiser » pour ce calcul ?
Confirmer la conjecture en retrouvant le PGCD de 455 et 335 par l'algorithme d'Euclide.

III. *Caractérisation des diviseurs communs à deux entiers*

3^{eme}

1) Le PGCD de 264 et 110 est égal à 22.
   En déduire la liste de tous les diviseurs communs à 264 et 110.

2) Combien y a-t-il de diviseurs communs aux entiers 455 et 335 ?

3) Avant de commencer une partie de poker, les joueurs se répartissent 198 jetons rouges et 120 jetons bleus.
   Tous les joueurs disposent alors d'un même nombre de jetons rouges, d'un même nombre de jetons bleus, et tous les jetons sont distribués.
   Combien y a-t-il de joueurs autour de la table ?

4) La division euclidienne de 1322 par un entier naturel d donne pour reste 2.
   La division euclidienne de 510 par le même entier naturel d donne pour reste 6.
   Déterminer toutes les valeurs possibles du nombre d.

IV. *En « remontant » les algorithmes*

…….

1) Observer sur l'exemple suivant comment exprimer le PGCD Δ de 84 et 60 sous la forme : $\Delta = l \times 84 + m \times 60$ où l et m sont des entiers relatifs.

   - En « remontant » l'algorithme des différences :

n	a_n	b_n	$a_n - b_n$	$12 = 3\times84 - 4\times60$
1	84	60	24	$12 = 3\times(84 - 60) - 60 = 3\times84 - 4\times60$
2	60	24	36	$12 = 2\times24 - (60 - 24) = 3\times24 - 60$
3	36	24	12	$12 = 24 - (36 - 24) = 2\times24 - 36$
4	24	12	12	$12 = 24 - 12$
5	12	12	0	

On obtient : $12 = 3\times84 - 4\times60$.

   - En « remontant » l'algorithme d'Euclide :

n	a_n	b_n	q_n	r_n	$12 = -2\times84 + 3\times60$
1	84	60	1	24	$12 = 60 - 2\times(84 - 60\times1) = 60 - 2\times84 + 2\times60$
2	60	24	2	12	$12 = 60 - 2\times24$
3	24	12	2	0	

On obtient : $12 = -2\times84 + 3\times60$.

2) En s'inspirant de l'exemple précédent, exprimer le PGCD 22 de 264 et 110 sous la forme : $22 = l'\times264 + m'\times110$ où l' et m' sont des entiers relatifs ;

   - en « remontant » l'algorithme des différences ;

   - en « remontant » l'algorithme d'Euclide.