# Pour une initiation progressive
# au raisonnement déductif en géométrie au collège

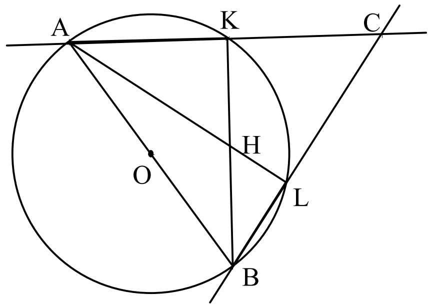
## I - Introduction

Un texte d'exercice en classe de Quatrième :

Tracer un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 3 cm. Tracer un diamètre [AB]. Placer deux points K et L sur le cercle $\mathcal{C}$ tels que K et L sont dans le même demi-plan de frontière (AB).

1) Démontrer que les triangles AKB et ALB sont rectangles.
2) Les droites (AK) et (BL) se coupent en C. Les droites (AL) et (BK) se coupent en H.

   Démontrer que (CH) est perpendiculaire à (AB).




Voici les réponses données par trois élèves différents dans une classe de quatrième.
Le schéma n'a pas présenté de difficultés particulières.

Les réponses d'élèves sont retranscrites telles qu'elles apparaissent sur les copies.

**Élève 1**

1) On sait que [AB] sont le diamètre du cercle et que K et L sont sur le cercle. Dans un cercle circonscrit tout points se trouvant sur ce cercle est rectangle à un triangle, là c'est le cas « AKB » K est rectangle.
   Donc AKB est rectangle et ALB et rectangle.
2) On sait que : c'est le sommet du triangle ABC est H coupe le milieu du segment [AB].
   Donc (CH) ⊥ (AB).

**Élève 2**

1) <u>On sait que</u> :
   [AB] est un diamètre du cercle $\mathcal{C}$.

   | |
   |---|
   | <u>Si</u> un triangle coupe un autre triangle sur le milieu de son côté<br><u>Alors</u> il est rectangle. |

   <u>Donc</u> : AKB et ALB sont des triangles rectangles.
2) <u>On sait que :</u>
   [AB] est le diamètre du cercle $\mathcal{C}$, (AK) et (BL) se coupent en C, (AL) et (BK) se coupent en H et AKB et ALB sont des triangles rectangles.

   | |
   |---|
   | <u>Si</u> dans un triangle, les trois médianes se coupent en un même point, alors elles sont concourantes et leur orthocentre est C. |

   <u>Donc</u> : (CH) ⊥ (AB).

**Élève 3**

1) On sait que AB est un diamètre, K et L sont placés dans un même demi-cercle et sur le cercle $\mathcal{C}$.
Si un triangle a un côté qui est un diamètre et un point sur un cercle $\mathcal{C}$ alors les triangles sont rectangles.
Donc KAB est un triangle rectangle en K.
ALB est un triangle rectangle en L.
2) On sait que L est perpendiculaire à (BC)
K est perpendiculaire à (AC)
Et que les 2 points passent par un sommet.
Dans un triangle les 3 hauteurs se coupent en un seul point qui s'appelle l'orthocentre.
Donc : (CH) $\perp$ (AB).

Ces trois élèves font partie de la même classe. Ils ont manifestement utilisé un modèle de rédaction similaire. Il est alors légitime de s'interroger :

1) L'élève n'est-il pas perturbé par ce modèle de rédaction ?
   N'est-il pas préférable de le laisser s'exprimer dans son langage ?
2) A quel niveau de compréhension se situe chacun de ces élèves ?
3) Quels exercices de remédiation envisager pour chacun d'eux ?

L'exposé qui suit se propose de définir une stratégie et une progression cherchant à répondre à ces questions.

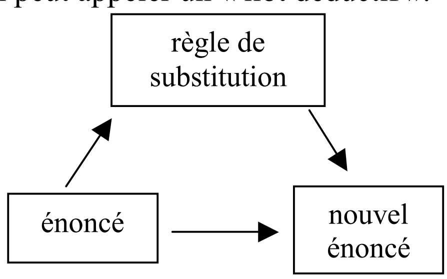
Deux attitudes semblent indispensables pour tenter d'atteindre cet objectif :
- ne pas se contenter de sanctionner l'élève qui a donné une réponse fausse, mais analyser cette réponse, dans son langage, afin de détecter les éléments positifs de son discours.
- étudier les erreurs de l'élève et lui proposer des activités de remédiation, la seule correction de l'exercice étant insuffisante.

## II - Structure du raisonnement

Chaque pas de démonstration est constitué de ce que l'on peut appeler un « îlot déductif ».

Chaque îlot déductif est formé par :

1) des énoncés donnés ou antérieurement démontrés,
2) une règle de substitution (théorème, définition...),
3) un nouvel énoncé (ou conclusion).




**Remarques**

1) Le nombre de conditions à prendre en compte pour appliquer une règle de substitution est variable.
2) L'unité de base de toute organisation déductive comporte trois énoncés, chacun ayant un statut différent, même si, lors de la rédaction, on peut omettre la règle de substitution et avoir l'impression d'avoir affaire à une structure binaire.

## III - Une progression favorisant la mise en place du raisonnement

A l'école primaire, les enfants ont observé des figures, mesuré, fait des découpages, comparé des aires, expérimenté, reproduit, décrit, représenté, construit … « visant ainsi à favoriser la construction d'images mentales et la mise en évidence de quelques propriétés (côtés de même longueur, angles droits, parallélisme, axes de symétrie) », ils ont mis en place un « vocabulaire minimum, précis mais limité (face, arête, sommet, côté, segment, milieu, ligne droite, angle, perpendiculaire, parallèle) » ; ils ont appris à utiliser les instruments du dessin (règle, équerre, compas), à construire quelques figures planes (carré, rectangle, losange, cercle) et à réaliser des patrons de solides (cube, pavé).

« En sixième, les élèves ne travaillent pas sur des objets nouveaux », les travaux conduits à ce niveau doivent prendre en compte les acquis antérieurs, ils doivent viser à les stabiliser, les structurer, et peu à peu les hiérarchiser, avec, notamment, un objectif de préparation à la déduction. « La distinction entre dessin et figure géométrique commence à être établie, notamment en distinguant les propriétés vérifiées expérimentalement et les propriétés établies par déduction ».

→ ( Voir BO n°44 du 05/12/1996 : Mathématiques « articulation école-collège » p 2947)

Au collège, l'élève devra donc évoluer d'une géométrie d'observation vers une géométrie de déduction.

On indiquera les différentes étapes à franchir afin d'atteindre la mise en place correcte et l'expression d'un raisonnement déductif.

### ❑ Première étape
### Faire admettre aux élèves la nécessité de la démonstration

Certains exercices aident à comprendre la nécessité de la démonstration.

→ *Voir « Fiche annexe 1 »*

### ❑ Deuxième étape
### Travailler sur les informations

Entre relever les informations et traiter le informations, il existe différents niveaux de compétence.
Pour faire fonctionner un théorème, il est nécessaire d'avoir relevé, trié et utilisé un certain nombre d'informations.
Face à un texte donné ou à une figure donnée, on peut distinguer :

- d'une part les élèves sachant ordonner les propriétés qui président à la construction des figures,
- de l'autre, ceux qui sont seulement capables de repérer et de désigner les informations sans faire de liens entre elles.

De façon plus précise, on peut identifier plusieurs stades :

**Stade 1**

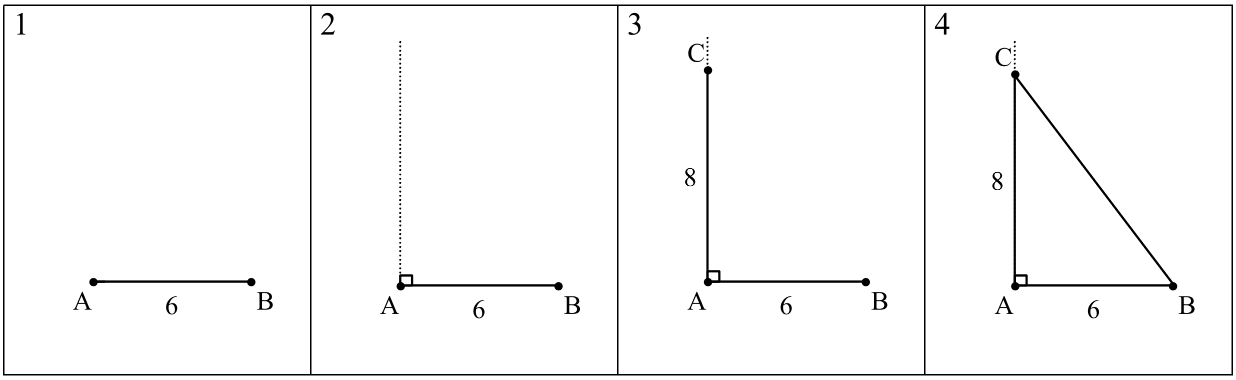
L'élève identifie une information isolée. Les figures sont porteuses de propriétés mais celles-ci sont considérées de façon indépendante. L'élève sait par exemple repérer deux droites perpendiculaires ou deux segments de même longueur sur une figure codée. Inversement, il sait coder une figure réalisée à partir d'une consigne écrite. En arrivant en Sixième, l'élève prendra l'habitude de relier spontanément la phrase « les deux segments [AB] et [CD] ont la même longueur », l'écriture mathématique « AB = CD » et le codage de la figure.

**Stade 2**

Les propriétés commencent à s'ordonner. L'élève sait, par exemple, résoudre les problèmes suivants :

- **Exemple 1**

*Construire un triangle ABC rectangle en A tel que AB = 6 cm et AC = 8 cm.*




- **Exemple 2**

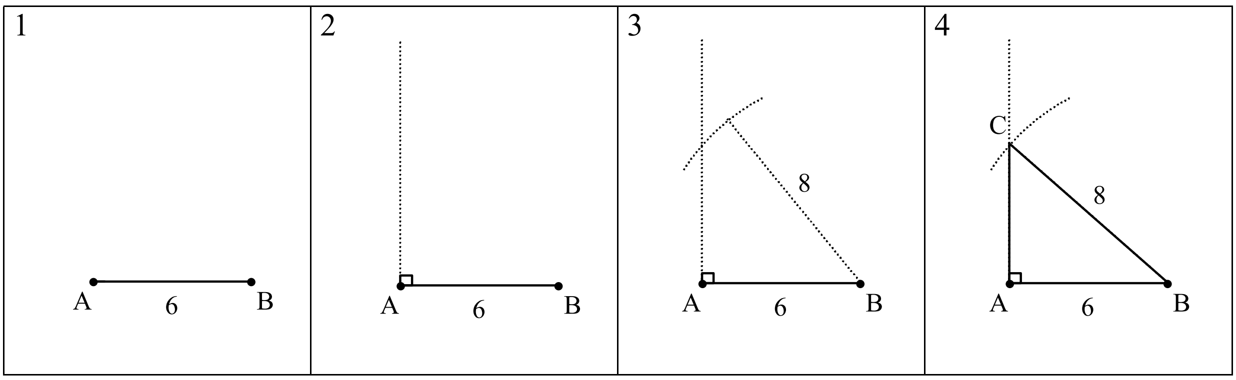
*Tracer, en utilisant la règle graduée et l'équerre, la médiatrice d'un segment de longueur donnée 6 cm.*

**Stade 3**

L'élève sait hiérarchiser les informations et tenir compte simultanément de plusieurs d'entre elles. Il sait résoudre les problèmes suivants :

- **Exemple 1**

*Construire un triangle ABC rectangle en A tel que AB = 6 cm et BC = 8 cm.*



- **Exemple 2**

*Construire, en utilisant la règle et le compas, la médiatrice d'un segment donné.*

Certains types d'exercices peuvent être envisagés :

- figures téléphonées,
- transformation d'un texte donnant une description générale en un texte donnant les étapes d'une construction.
  Exemple : « *Tracer un triangle ABC rectangle en A, H le pied de la hauteur issue de A* » peut se transformer en : « *Tracer un triangle ABC rectangle en A. Tracer la droite d passant par A et perpendiculaire à (BC). d et (BC) se coupent en H* ».
  On peut aussi envisager l'exercice inverse.

De façon plus générale, tout exercice sollicitant le passage d'un registre « texte » à un registre « figure » ou inversement permet de travailler sur les informations.

→ *Voir « Fiche annexe 2 »*

### ❑ Troisième étape
### Rechercher dans un texte ou sur une figure les informations nécessaires à prendre en compte pour utiliser une règle de substitution (théorème, définition...)

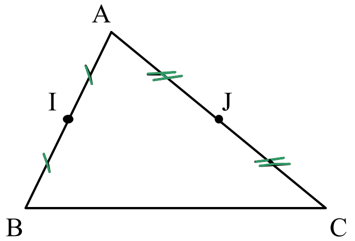
Beaucoup d'élèves ayant à leur disposition le bon théorème ne savent pas l'appliquer correctement… D'où les difficultés de ceux qui souvent apprennent les leçons mais sont incapables de les réinvestir.
Il est possible d'agir sur deux plans :

**Au niveau du cours**

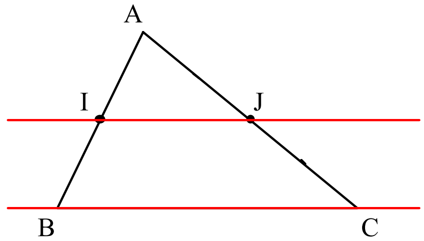
Bien discerner le statut des conditions dans l'énoncé même du théorème.

**Exemple**
Pour le théorème des milieux, on pourra procéder :

- Soit en décomposant en deux figures :

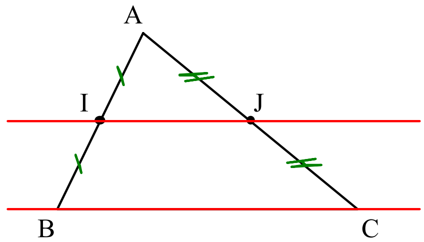



avant




après

- Soit en différenciant sur un même schéma par des couleurs les hypothèses et la conclusion.



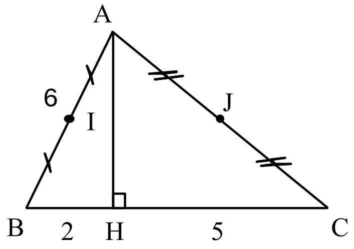

Vert : hypothèses
Rouge : conclusion

Pour appliquer ce théorème, il faut donc reconnaître un schéma de type 1 sans oublier de prendre toutes les conditions mises en jeu et seulement celles-là.

**Au niveau des exercices**

Les figures ou les textes portent- ils les informations permettant d'appliquer une règle de substitution ?

**Exemple**




*« Quelles informations donne cette figure ?*
*Quels théorèmes pourrait-on utiliser ? »*

Certaines erreurs indiquent que cette étape n'est pas franchie :
- la conclusion est confondue avec l'hypothèse,
- une seule condition est proposée alors que la règle de substitution en demande plusieurs.

→ *Voir « Fiche annexe 3 »*

### ❑ Quatrième étape
### Comprendre qu'un îlot déductif comporte trois éléments (les données, la règle, la conclusion)

Les élèves qui n'ont pas compris cette étape produisent des textes de rédaction qui reproduisent le schéma demandé, mais la structure profonde de la démonstration n'est pas comprise.
Ils invoquent des théorèmes qui ne fonctionnent pas, les données du texte n'ayant aucun lien avec les hypothèses du théorème.

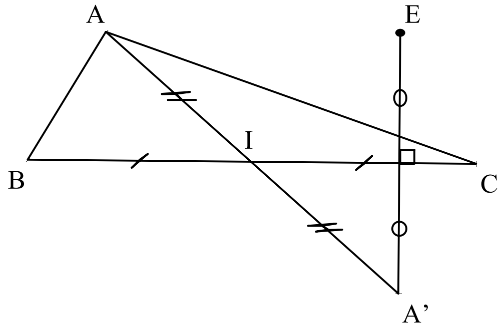
Par exemple, pour l'exercice donné en introduction, l'**Élève 4** propose :

| |
|---|
| K et L sont deux points du cercle.<br>Or un triangle rectangle est un triangle qui a un angle droit.<br>Donc AKB est un triangle rectangle. |

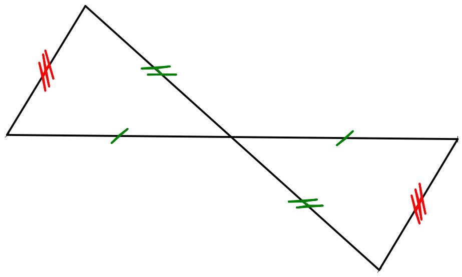
Pour franchir cette étape, il faut que l'élève soit capable d'isoler, dans un environnement éventuellement complexe, une « configuration-clé » afin de faire fonctionner le théorème.

**Exemples**

1) ABC est un triangle, I le milieu de [BC], A' le symétrique de A par rapport à I. Soit E le symétrique de A' par rapport à (BC). Démontrer que AB = CA'.

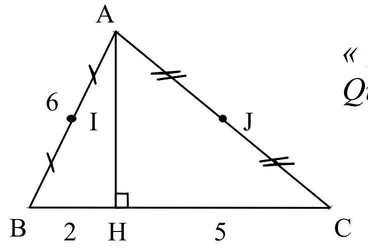


- On reconnaît dans un environnement complexe le schéma illustrant une règle de substitution :



- On applique la règle de substitution.
- On donne la conclusion.

2) Retour sur un exemple précédent.




*« Quelles informations donne cette figure ?*
*Quels théorèmes pourrait-on utiliser ? »*

On rajoute la troisième question :

*« Que peut-on en conclure ? »* ou « *quelles questions pourrait-on poser ? »*

⟶ *Voir « Fiche annexe 4 »*

### ❑ Cinquième étape
### Comprendre que le statut des énoncés est indépendant de leur contenu

L'objectif de cette étape est de bien montrer qu'au cours d'une démonstration, la conclusion d'un îlot déductif devient une donnée dans un îlot postérieur.
Lorsque cette étape est franchie, l'élève peut alors envisager la construction de raisonnements à plusieurs pas.

### ❑ Sixième étape
### Faire fonctionner plusieurs îlots déductifs

Pour des élèves ayant des difficultés d'écriture et de rédaction, une façon de travailler ce seuil en utilisant des déductogrammes.

### ❑ Septième étape
### Rédiger

Étape ultime de cette progression, la rédaction ne saurait prendre le pas sur la démarche mathématique, en particulier lors de la notation de travaux.
Les rédactions produites par les élèves reflètent souvent les difficultés qu'ils éprouvent et peuvent nous renseigner sur leur niveau de compréhension.

En reprenant les productions d'élèves choisies dans l'introduction :

### Élève 1

Cet élève semble avoir compris le mécanisme d'une démonstration à un pas, même si ses formulations sont extrêmement maladroites. En revanche, il n'aborde en aucune façon la démonstration à deux pas et fournit des arguments qui n'ont plus aucune cohérence avec la recherche conduite.
Un gros travail reste à effectuer avec lui sur le statut des énoncés et sur leurs formulations.
Il pourra ainsi clarifier son propre discours et aborder la démonstration à plusieurs pas.

### Élève 2

Il semble également avoir compris le mécanisme de la démonstration à un pas, même si les énoncés des théorèmes utilisés sont erronés. La rédaction proposée à la deuxième question n'est pas complètement convaincante pour décider si l'élève a compris un enchaînement à deux pas.
Un travail important est à faire sur la formulation claire et la compréhension des différents théorèmes. Peut-être est-il un peu plus en avance que l'élève 1 quant à sa capacité à se rapprocher d'une solution correcte lorsque le nombre de pas est supérieur à un ?

### Élève 3

Cet élève semble très proche d'une solution correcte. Un travail de mise en forme, surtout à la deuxième question, lui permettra de fournir une rédaction acceptable d'une solution au problème proposé. Les formulations du type « L est perpendiculaire à (BC) » ne nous semblent pas de nature à perturber l'enchaînement de la démonstration, par contre il est indispensable de les corriger car elles cachent des inexactitudes dans l'appropriation de certaines notions qui peuvent avoir des conséquences dommageables sur le raisonnement lui-même.
Des séances de travail sur différentes sortes de rédactions pourraient être proposées à cet élève afin qu'il améliore sa production.

Valoriser excessivement la rédaction induit de la part des enfants des comportements vis à vis du raisonnement qui ressemblent plus à une imitation qu'à une véritable démarche personnelle de recherche.
La rédaction spontanée des élèves nous renseigne sur leurs démarches, sur leurs recherches, sur leurs méthodes. La standardiser trop tôt, en imposant un modèle, nous paraît susceptible d'instaurer un blocage prématuré préjudiciable à l'initiative et à l'appropriation des connaissances.