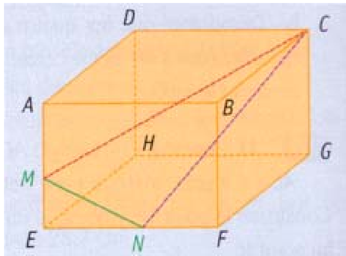
Triangle dans un pavé

Problème

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que :
AB = 7 cm ; AE = 5 cm et AD = 6 cm.
M est le point du segment [AE] tel que AM = 3 cm.
N est un point du segment [EF].

Le triangle MCN peut-il être rectangle ?



Étape 1 - Conjecture

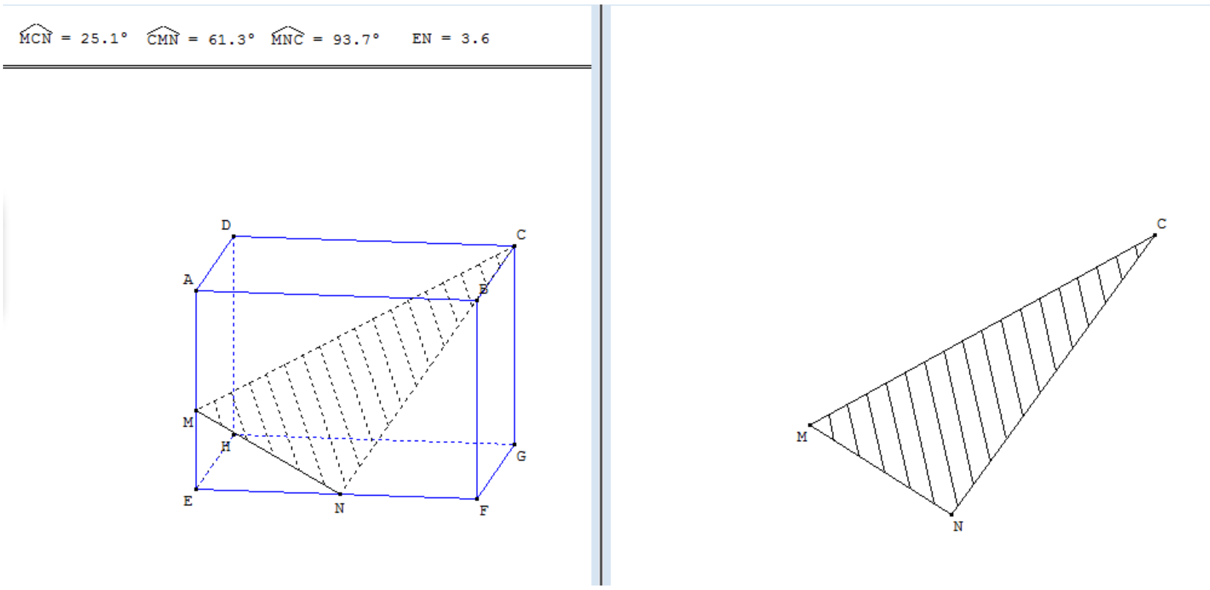
Ouvrir les deux fichiers TRI_PAV1.G3W et TRI_PAV2.G2W et les placer en mosaïque verticale à l'aide du menu Fenêtre > Mosaïque Verticale (le fichier TRI_PAV2.G2W montre le triangle MCN dans un plan de face).

En déplaçant le point N dans le fichier TRI_PAV1.G3W on peut conjecturer l'existence de plusieurs solutions.

L'affichage des mesures des angles permet de conforter la conjecture.

Commandes :

- Touche **M** : afficher/cacher la mesure de l'angle $\widehat{CMN}$.
- Touche **C** : afficher/cacher la mesure de l'angle $\widehat{MCN}$.
- Touche **N** : afficher/cacher la mesure de l'angle $\widehat{MNC}$.
- Touche **X** : afficher/cacher la longueur EN.



Étape 2 - Démonstration

1. Justifier que le triangle MCN ne peut pas être rectangle en C.

   Il faut montrer que la valeur maximale de MN qui est MF est inférieure à CM ou à CF.

2. Nommer x la longueur du segment [EN].

   Calculer MC^2 et exprimer MN^2 et CN^2 en fonction de x.

3. Déterminer la valeur de x pour que le triangle MCN soit rectangle en M.

4. (a) Traduire par une équation le fait que le triangle MCN soit rectangle en N.

   (b) Vérifier que les valeurs de x conjecturées à l'aide du logiciel (2 et 5) sont bien solutions de cette équation.

   (c) Développer l'expression $(x-2)(x-5)$; utiliser ce résultat pour justifier que l'équation précédente n'admet que deux solutions.

   COMMANDES :

   Calcul de MC^2

   * Touche **1** : afficher/cacher le triangle AMC.

   * A l'aide de la touche 

mettre le plan AMC de face.

   * Touche **W** : permet de retrouver la vue initiale.

   Calcul de CN^2

   * Touche **1** : afficher/cacher le triangle CNF.

   * A l'aide de la touche 

mettre le plan CNF de face.

   * Touche **W** : permet de retrouver la vue initiale.

Étape 3 - Prolongement éventuel

Obtenir géométriquement les trois points solution par intersection de la droite (EF) avec la sphère de diamètre [MC] d'une part et avec le plan passant par M orthogonal à (MC) d'autre part.