

Rédaction, présentation, orthographe (4 points)

PARTIE I : ACTIVITÉS NUMÉRIQUES (12 points)

Dans toute cette partie, les résultats des calculs demandés doivent être accompagnés d'explications, le barème en tiendra compte.

Les 4 exercices sont indépendants.

Exercice I :

$$A = \frac{7}{9} : \left(\frac{1}{3} - 2\right) \quad B = \frac{7 \times (7^{-2})^{-4}}{7^{11}}$$

1. En faisant apparaître les différentes étapes de calcul, écrire A et B sous la forme d'une fraction irréductible.

$$A = \frac{7}{9} : \left(\frac{1}{3} - 2\right) = \frac{7}{9} : \left(\frac{1}{3} - \frac{6}{3}\right) = \frac{7}{9} : \left(\frac{-5}{3}\right) = \frac{7}{9} \times \left(\frac{-3}{5}\right) = -\frac{7 \times 3}{9 \times 5} = -\frac{7}{3 \times 5} = -\frac{7}{15}$$

$$B = \frac{7 \times (7^{-2})^{-4}}{7^{11}} = \frac{7 \times 7^{(-2) \times (-4)}}{7^{11}} = \frac{7 \times 7^8}{7^{11}} = \frac{7^9}{7^{11}} = 7^{9-11} = 7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$$

2. On donne : $C = 3\sqrt{54} - 7\sqrt{6} - \sqrt{2} \times \sqrt{12}$. Montrer que C est un nombre entier.

$$C = 3\sqrt{54} - 7\sqrt{6} - \sqrt{2} \times \sqrt{12}$$

$$C = 3\sqrt{9 \times 6} - 7\sqrt{6} - \sqrt{2} \times \sqrt{2 \times 6}$$

$$C = 3 \times \sqrt{9} \times \sqrt{6} - 7\sqrt{6} - \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{6}$$

$$C = 3 \times 3 \times \sqrt{6} - 7\sqrt{6} - 2 \times \sqrt{6}$$

$$C = 9\sqrt{6} - 7\sqrt{6} - 2\sqrt{6}$$

$$C = (9 - 7 - 2)\sqrt{6}$$

$$C = 0 \text{ et } 0 \text{ est un nombre entier.}$$

Exercice II :

Soit $D = (3x + 5)(2 - x) - (2 - x)^2$

1. Développer puis réduire D.

$$D = (3x + 5)(2 - x) - (2 - x)^2$$

$$D = 3x \times 2 - 3x \times x + 5 \times 2 - 5 \times x - (2^2 - 2 \times 2 \times x + x^2)$$

$$D = 6x - 3x^2 + 10 - 5x - (4 - 4x + x^2)$$

$$D = 6x - 3x^2 + 10 - 5x - 4 + 4x - x^2$$

$$D = -4x^2 + 5x + 6$$

2. Factoriser D.

$$D = (3x + 5)(2 - x) - (2 - x)^2$$

$$D = (2 - x)[(3x + 5) - (2 - x)]$$

$$D = (2 - x)(3x + 5 - 2 + x)$$

$$D = (2 - x)(4x + 3)$$

3. Résoudre $(2 - x)(4x + 3) = 0$

Si un produit est nul, alors l'un des facteurs est nul donc

$$(2 - x) = 0 \quad \text{ou} \quad (4x + 3) = 0$$

$$x = 2 \quad \text{ou} \quad 4x = -3$$

$$x = 2 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{3}{4}$$

L'équation a deux solutions : 2 et $-\frac{3}{4}$

Exercice III :

En l'an 2000, le nombre de voitures neuves vendues en France a été de 2134 milliers, répartis de la façon suivante :

- 602 milliers de Renault ;
- 262 milliers de Citroën ;
- 398 milliers de Peugeot ;
- des voitures de marques étrangères.

1. Quelle est la fréquence des ventes, exprimée en pourcentage et arrondie à 1 % pour les voitures de marques étrangères ?

Il y a 872 milliers de voitures étrangères vendues: $2\,134 - (602 + 262 + 398) = 872$

$$\frac{872}{2\,134} \approx 0,408 \approx 41\%$$

La fréquence des ventes de voitures étrangères est 41%

2. Dans le total des ventes de voitures françaises, quel pourcentage représentent les voitures Renault ?

Il y a 1262 milliers de voitures françaises vendues : $602 + 262 + 398 = 1262$

$$\frac{602}{1\,262} \approx 0,477 \approx 48\%$$

Les ventes de voitures Renault représentent 48% des ventes de voitures françaises.

Exercice IV :

1. Trouver, en indiquant les calculs effectués, le PGCD des nombres 4539 et 3471.

En utilisant l'algorithme d'Euclide :

$$4\,539 = 1 \times 3\,471 + 1\,068$$

$$3\,471 = 3 \times 1\,068 + 267$$

$$1\,068 = 4 \times 267 + 0$$

Le PGCD est le dernier reste non nul donc $\text{PGCD}(4\,539, 3\,471) = 267$

2. En déduire la fraction irréductible égale à $\frac{4539}{3471}$.

Pour obtenir une fraction irréductible, on divise le numérateur et le dénominateur par leur PGCD

$$\frac{4\,539}{3\,471} = \frac{4\,539 : 267}{3\,471 : 267} = \frac{17}{13}$$

3. Utiliser la question précédente pour calculer $E = \frac{4539}{3471} + \frac{3}{26}$.

$$E = \frac{4539}{3471} + \frac{3}{26} = \frac{17}{13} + \frac{3}{26} = \frac{17 \times 2}{26} + \frac{3}{26} = \frac{34}{26} + \frac{3}{26} = \frac{37}{26}$$

Exercice I :

Sur ce dessin, les dimensions ne sont pas respectées.

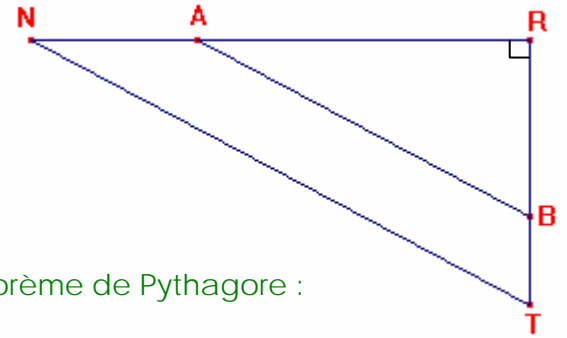
On considère un triangle RNT rectangles en R tel que :

$$NR = 9 \text{ cm}$$

$$AR = 6 \text{ cm}$$

$$NT = 10,2 \text{ cm}$$

$$BT = 1,6 \text{ cm}$$



1. Calculer la longueur RT.

Dans le triangle RNT, rectangle en R, d'après le théorème de Pythagore :

$$NT^2 = RT^2 + RN^2$$

$$RT^2 = NT^2 - RN^2$$

$$RT^2 = 10,2^2 - 9^2 = 23,04$$

$$RT = \sqrt{23,04} = 4,8 \text{ cm}$$

2. En considérant que RT = 4,8 cm, démontrer que les droites (AB) et (NT) sont parallèles.

R, B, T sont alignés donc $RB = RT - BT = 4,8 - 1,6 = 3,2 \text{ cm}$

$$\frac{RB}{RT} = \frac{3,2}{4,8} = \frac{32}{48} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{AR}{RN} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

On a donc $RB/RT = AR/RN$. D'autre part les points R, A, N et R, B, T sont alignés et dans le même ordre donc d'après la réciproque du théorème de Thalès :

(AB) // (NT)

3. Calculer la mesure de l'angle \widehat{RNT} ; en donner la valeur arrondie au degré près.

Dans le triangle RNT, rectangle en R, on a $\tan \widehat{RNT} = \frac{RT}{RN} = \frac{4,8}{9}$

Et $\widehat{RNT} \approx 28^\circ$

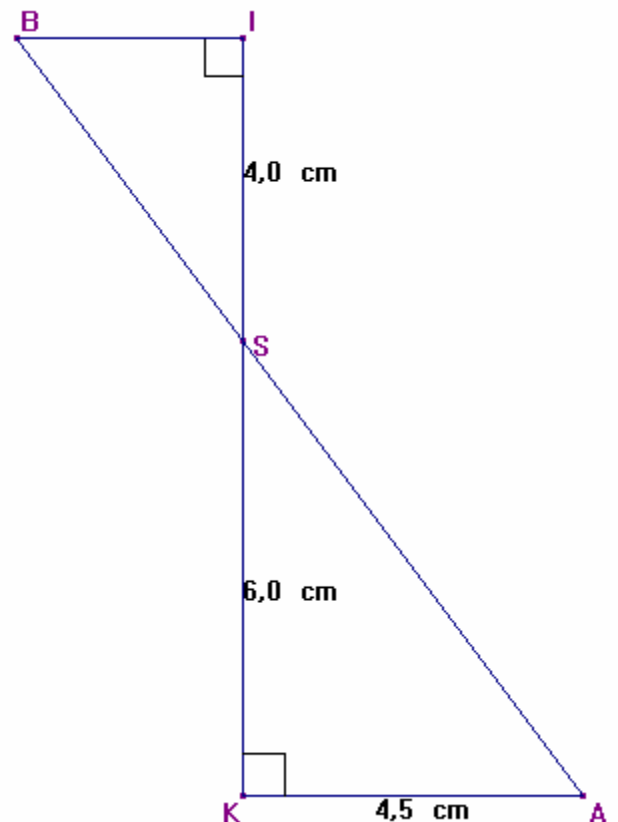
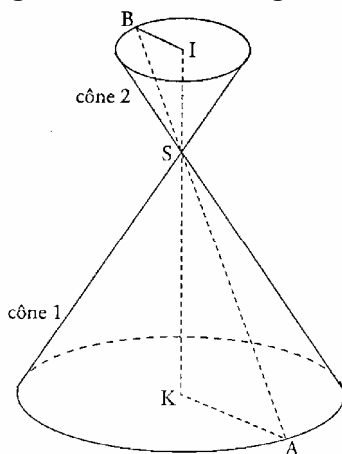
Exercice II :

Les deux cônes de révolution de rayons KA et IB, sont opposés par le sommet.

Les droites (AB) et (KI) se coupent en S, et de plus (BI) et (KA) sont parallèles.

On donne : KA = 4,5 cm, KS = 6 cm et SI = 4 cm.

1. Tracer en vraie grandeur et sur la même figure les deux triangles SKA et SBI.



2. Calculer BI.

Les droites (KI) et (AB) sont sécantes en K et (BI)//(KA) donc d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{BI}{KA} = \frac{SI}{SK} = \frac{SB}{SA} . \text{ On obtient alors: } \frac{BI}{4,5} = \frac{4}{6} \text{ donc } BI = \frac{4,5 \times 4}{6} = 3\text{cm}$$

3. Calculer le volume V_1 du cône 1. (Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie au cm^3 .)

$$\text{Volume du cône} = \frac{\text{Aire base} \times \text{hauteur}}{3}$$

$$V_1 = \frac{\pi \times (KA)^2 \times SA}{3} = \frac{\pi \times (4,5)^2 \times 6}{3} = \pi \times (4,5)^2 \times 2 = 40,5\pi \text{ cm}^3 \approx 127 \text{ cm}^3$$

4. Le cône 2 est une réduction du cône 1.

Quel est le coefficient de réduction ? Par quel nombre exact faut-il multiplier V_1 , volume du cône 1, pour obtenir directement le volume V_2 du cône 2 ?

$$\text{Le coefficient de réduction est } \frac{SI}{SK} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Quand les longueurs sont multipliées par un nombre k , alors les volumes sont multipliés par k^3 .

$$\text{Ainsi } V_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 V_1 = \frac{8}{27} V_1$$

PARTIE III : PROBLEME (12 points)

Toutes les lectures sur le graphique doivent être justifiées par des tracés en pointillé.

★ Première partie

Nicolas désire louer des cassettes vidéo chez Videomaths qui lui propose les deux possibilités suivantes pour une location à la journée :

Option A : Tarif à 3 € par cassettes louée (€ est le symbole de l'euro)

Option B : Une carte d'abonnement de 15 € pour 6 mois avec un tarif de 1,5 € par cassette louée.

1. a) reproduire et compléter le tableau suivant :

Nombres de cassettes louées en 6 mois.....→	4	8	10	12
Prix en euro payé avec ↓				
l'option A	12	24	30	36
l'option B	21	27	30	33

b) Préciser dans chaque cas l'option la plus avantageuse.

Dans les cas où on loue moins de 10 cassettes (4 cassettes et 8 cassettes), l'option A est plus avantageuse.

Dans le cas où on loue plus de 10 cassettes (12 cassettes) ,l'option B est plus intéressante.

Pour 10 cassettes , les deux options sont équivalentes.

2. On appelle x le nombre de cassettes louées par Nicolas pendant 6 mois.

a) Exprimer en fonction de x la somme $A(x)$ payée avec l'option A.

$$A(x) = 3x$$

b) Exprimer en fonction de x la somme $B(x)$ payée avec l'option B.

$$B(x) = 1,5x + 15$$

✪ Deuxième partie

On considère les fonctions définies par :

$$f(x) = 3x \quad g(x) = 1,5x + 15$$

Dans toute la suite du problème, on admettra que la fonction f est associée à l'option A et que la fonction g est associée à l'option B.

1. Construire les représentations graphiques des fonctions f et g .

f est une fonction linéaire, elle est représentée par une droite qui passe par l'origine et le point $(10 ; f(10))$, c'est-à-dire par les points $(0 ; 0)$ et $(10 ; 30)$

g est une fonction affine, elle est représentée par une droite qui passe par les points $(0 ; g(0))$ et $(10 ; g(10))$, c'est-à-dire par les points $(0 ; 15)$ et $(10 ; 30)$

2. Les représentations graphiques de f et g se coupent en E.

a) Lire sur le graphique les coordonnées du point E.

E a pour coordonnées $(10 ; 30)$

b) Que représentent les coordonnées de E pour les options A et B ?

E correspond au point où les deux options sont équivalentes.

L'abscisse de E correspond au nombre de cassettes louées : 10

L'ordonnée de E correspond au prix de location pour 10 cassettes : 30€

3. Lire sur le graphique la somme dépensée par Nicolas avec l'option A s'il loue 11 cassettes.

Nicolas dépense 33€ pour louer 11 cassettes avec l'option A

4. Nicolas dispose de 24 €. Lire sur le graphique le nombre de cassettes qu'il peut louer en 6 mois avec l'option B.

Avec 24€, Nicolas peut louer 6 cassettes en 6 mois avec l'option B.

5. Déterminer graphiquement à partir de quelle valeur de x l'option B est plus avantageuse que l'option A pour 6 mois.

L'option B est plus avantageuse quand la droite représentant g est en dessous de celle représentant f : ce qui correspond au point E, c'est-à-dire pour plus de 10 cassettes louées.

✪ Troisième partie

Nicolas ne veut dépenser que 40 € en 6 mois pour louer des cassettes.

1. Lire sur le graphique de la deuxième partie le nombre maximum de cassettes qu'il peut louer chez Videomaths avec chaque option, avec 40 € euros en 6 mois.

Avec 40€, Nicolas peut louer en 6 mois, au plus 13 cassettes avec l'option A, 16 avec l'option B.

2. Il se renseigne auprès de la société Cinémaths qui lui propose un abonnement de 7,5 € pour 6 mois permettant de louer chaque cassette à la journée pour 2,5 €.

L'objectif de cette partie est de déterminer, parmi les trois tarifs, l'offre la plus avantageuse pour Nicolas.

Soit x le nombre de cassettes louées par Nicolas en 6 mois.

a) Montrer que le prix payé par Nicolas chez Cinémaths est donné par l'expression :

$$h(x) = 2,5x + 7,5$$

Chez Cinémath, Nicolas paierait 7,5€ pour l'abonnement plus $2,5 \times x$ pour x cassettes soit $2,5x + 7,5$.

b) Calculer le nombre de cassettes que Nicolas peut louer en 6 mois avec 40 € chez Cinémaths.

Mise en équation du problème : $2,5x + 7,5 = 40$

$$\text{Résolution : } x = \frac{40 - 7,5}{2,5} = 13$$

Nicolas peut louer 13 cassettes en 6 mois chez Cinémath.

c) En déduire l'offre la plus avantageuse pour Nicolas.

L'offre la plus avantageuse pour Nicolas qui dispose de 40€ est l'option B de Vidéomath.

