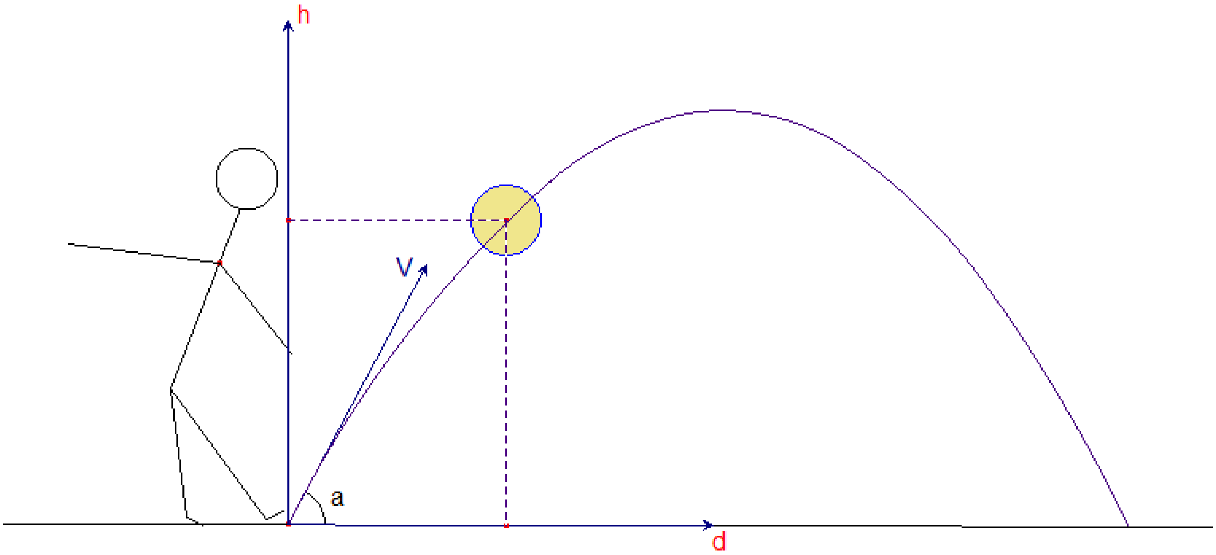
Dégagement d'un gardien de but

Fiche élève

On veut étudier le dégagement d'un gardien de but de football en utilisant l'angle de tir et la force de frappe.



On note V la vitesse initiale du ballon, c'est-à-dire la vitesse au moment où le gardien tape dans le ballon et a l'angle formé par la direction du ballon à cet instant avec l'horizontale.

V est exprimé en m/s et a en degrés, $a \in [0;90]$, le temps est exprimé en seconde.

A l'instant t la position du ballon est définie par ses coordonnées $(d(t);h(t))$ dans le repère représenté ci-dessus. On admet que, à l'instant t, $h(t) = -5t^2 + V\sin(a)t$ et $d(t) = V\cos(a)t$.

Partie A : Étude à l'aide de Maxima

La position du ballon dépendant du temps mais aussi de V et de a, définir :
$h(t,V,a) := -5*t\hat{}2 + V*\sin(a)*t$ et $d(t,V,a) := V*\cos(a)*t$.

a. A quelle hauteur se trouve le ballon au bout de 2s si V = 25 m/s et a = 30 ° ?

Attention, Maxima travaillant en radian il faut remplacer a par a*%pi/180

b. A l'instant t=0, le ballon est au sol puis retouche le sol au bout d'un temps t solution de l'équation $h(t,V,a) = 0$. Déterminer cet instant nommé tvol.

Application : Quel est le temps de vol du ballon si V = 25 m/s et a = 30 ° ?

c. On note dmax la distance séparant le ballon du gardien à l'instant tvol.

Montrer que $\text{dmax} = \dfrac{\cos(a)\sin(a)V^2}{5}$.

Application : Quelle est la longueur du dégagement du gardien si V = 25 m/s et a = 30 ° ?

d. Définir $f(a) := \dfrac{\cos(a)*\sin(a)*V^2}{5}$ et vérifier que $f'(a)$ est du signe de $\sin(a) - \cos(a)$.

En déduire la valeur de a qui rend maximale, pour V constant, la portée du dégagement.

e. Résoudre $x = d(t,V,a)$ par rapport à t et substituer la valeur trouvée dans $h(t,V,a)$.

On obtient ainsi l'ordonnée du ballon en fonction de son abscisse. Sélectionner et copier le résultat obtenu.

Partie B : Application avec Geogebra

a. Faire afficher un repère dans lequel l'axe des abscisses est gradué de 10 en 10 de 0 à 100, celui des ordonnées de 10 en 10 de 0 à 50.

b. Créer le curseur *V* variant de 0 à 30 en allant de 1 en 1, puis le curseur *a* (angle)variant de 0° à 90° en allant de 1° en 1°.

c. Définir la fonction *h* en utilisant le résultat copié précédemment dans Maxima.
La fonction *h* se trouve alors représentée sur $]-\infty;+\infty[$ au lieu de [0 ; dmax].

d. Définir $\mathrm{dmax} = \dfrac{\cos(a)\sin(a)V^2}{5}$ (vous pouvez copier la formule dans Maxima)

e. Définir la fonction h_1 par $h_1(x)$=Si[x>0,Si[x<dmax,$h(x)$]], correspondant à la restriction de h à l'intervalle [0 ; dmax].

f. Définir enfin tvol=dmax/(cos(a)*V) correspondant à la durée de vol du ballon.

Application 1 : Un gardien dont la force de frappe correspond à V=30 désire envoyer le ballon à un partenaire se situant à 50m de lui. Déterminer les angles de tir possibles ainsi que les temps de vol correspondant.

Application 2 : Un lanceur de poids confirmé lance l'engin aux alentours de 20m avec un angle de tir de 45°qu'il sait être profitable. Quelle est la vitesse initiale donnée au poids et quelle est le temps de vol du boulet?