Fiche élève

Suites associées

Enoncé

Dans un repère orthonormé, on considère les points $\boldsymbol{A_n}$ dont les coordonnées $(x_n ; y_n)$ sont définies pour $n = 0 : \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 11 \end{cases}$ et pour tout entier n : $\begin{cases} \boldsymbol{x_{n+1}} = 0{,}8\boldsymbol{x_n} - 0{,}6\boldsymbol{y_n} + 2 \\ \boldsymbol{y_{n+1}} = 0{,}6\boldsymbol{x_n} + 0{,}8\boldsymbol{y_n} - 2 \end{cases}$.

1°) (a) A l'aide d'un tableur, calculer les 50 premiers termes des suites (x_n) et (y_n).

(b) Représenter le nuage de points $\boldsymbol{A_n}$.

Appeler le professeur pour vérifier la feuille de calcul ou en cas de difficulté.

(c) Quelle conjecture peut-on formuler quant à la nature de la courbe (C) obtenue?

Appeler le professeur pour valider la conjecture.

2°) A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, représenter dans un repère orthonormé les points $\boldsymbol{A_0}$, $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{A_2}$ et $\boldsymbol{A_3}$. Affiner la conjecture émise à la question 1°) (c) en précisant les éléments caractéristiques de la courbe (C).

Appeler le professeur pour valider les conjectures.

3°) En complétant la feuille de calcul, vérifier expérimentalement les conjectures précédentes.

Appeler le professeur pour vérifier.

4°) Démontrer les conjectures faites à la question 2°).

Production demandée

- Construction de la feuille de calcul complète
- Formulation orale des conjectures
- Réponse argumentée à la question 4°)

Prolongement possible en devoir à la maison par exemple

5°) On pose $\Omega(4;2)$. En utilisant un logiciel de géométrie dynamique, calculer les angles $\widehat{A_0\Omega A_1}$, $\widehat{A_1\Omega A_2}$ et $\widehat{A_2\Omega A_3}$.

A l'aide de quelle transformation géométrique *f* semble-t-on obtenir le point $\boldsymbol{A_{n+1}}$ à partir du point $\boldsymbol{A_n}$?

6°) On rappelle que $\cos(\widehat{A_n\Omega A_{n+1}}) = \dfrac{\overrightarrow{\Omega A_n}.\overrightarrow{\Omega A_{n+1}}}{\Omega A_n \times \Omega A_{n+1}} = \dfrac{(x_n - 4)(x_{n+1} - 4) + (y_n - 2)(y_{n+1} - 2)}{97}$

(a) A l'aide du tableur calculer $\cos(\widehat{A_n\Omega A_{n+1}})$ puis l'angle $\widehat{A_n\Omega A_{n+1}}$ pour $n \in \{0;49\}$.

(b) Préciser le résultat conjecturé au 5°).

7°) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct, on pose $z_n = x_n + iy_n$ l'affixe du point $\boldsymbol{A_n}$; $\omega = 4 + 2\boldsymbol{i}$ est l'affixe du point Ω.

Soit θ tel que $\cos\theta = 0{,}8$ et $\sin\theta = 0{,}6$, montrer que $(z_{n+1} - \omega) = e^{i\theta}(z_n - \omega)$.

Quelle est la transformation du plan qui au point $\boldsymbol{A_n}$ associe le point $\boldsymbol{A_{n+1}}$?