Tangentes communes à deux paraboles

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = -x^2 + 2x - 3$.
On appelle respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs représentations graphiques dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Le but du problème est de déterminer les tangentes communes aux deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Partie A - Exploration avec GeoGebra

1. Ouvrir GeoGebra
2. Définir la fonction f par son expression : $f(x) = x^2 - 1$.
3. Faire de même avec la fonction g.
4. Créer un curseur a qui varie entre -5 et 5 avec un pas de $0,1$.
5. Définir le point A de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a, c'est-à-dire le point de coordonnées $(a, f(a))$.
6. En déplaçant le curseur, conjecturer le nombre de tangentes communes aux deux courbes.
7. Déterminer les valeurs approchées de a correspondant aux tangentes trouvées.

Partie B - Étude mathématique

1. On appelle A le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a.
   Calculer l'équation réduite de la tangente T_a à $\mathscr{C}_f$ au point A.
2. Démontrer que les points d'intersection de T_a avec la courbe $\mathscr{C}_g$ ont des abscisses qui sont solutions de l'équation $x^2 + 2x(a-1) - a^2 + 2 = 0$.
3. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles l'équation $x^2 + 2x(a-1) - a^2 + 2 = 0$ admet une racine double.
4. En déduire alors les équations des deux tangentes communes aux deux courbes.

Partie C - Calculs avec Maxima

1. Ouvrir Maxima.
2. Définir les deux fonctions f et g. (Syntaxe : $f(x) :=\ldots$)
3. Calculer l'équation réduite de la droite T_a.
4. Écrire le système d'équations correspondant à l'intersection de la droite T_a et de la courbe $\mathscr{C}_g$.
5. Résoudre alors la question B.3.
6. Déterminer enfin les équations des deux tangentes communes T_1 et T_2 aux deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.