Méthode d'Euler pour la détermination numérique d'une primitive

Majoration de l'erreur

On lit dans le programme de première S, applicable à la rentrée 2001 (BO HS n°7 du 31 août 2000) le passage suivant :
"*Exemples d'approximation de courbe intégrale définie par :* $y' = f(t)$ *et* $y(t_0) = y_0$ *en utilisant l'approximation* $\Delta f \approx f'(a)\,\Delta t$ *[...]. On pourra observer sur grapheur ou tableur l'erreur commise dans le cas où on connaît une expression de la fonction* y."

Il peut être utile à l'enseignant d'évaluer l'écart entre la fonction F telle que $F' = f$ avec $F(x_0) = y_0$, et la fonction G que l'on obtient par la méthode d'Euler d'approximation de F. Les résultats ci-dessous permettent de connaître assez précisément cet écart.

Résultats

Soit f une fonction monotone et continue sur un intervalle I, x_0 un réel de I et G la fonction obtenue par la méthode d'Euler avec un pas égal à h, pour la recherche de la primitive F de f sur I vérifiant $F(x_0) = y_0$.
Une majoration de l'erreur commise en un réel $x_n = x_0 + n\,h$ (n entier) est :

$$|\, G(x_n) - F(x_n) \,| \leq h\, |\, f(x_n) - f(x_0) \,|$$

De plus, une approximation de l'erreur est :

$$G(x_n) - F(x_n) \approx \frac{1}{2} h\, [\, f(x_n) - f(x_0) \,]$$

De façon plus précise, si f est dérivable sur I et que sa dérivée est continue, monotone et de signe constant sur I, l'erreur $G(x_n) - F(x_n)$ est comprise entre :

$$\frac{1}{2} h\, [\, f(x_n) - f(x_0) \,] \text{ et } \frac{1}{2} h\, [\, f(x_n) - f(x_0) \,] - \frac{1}{8} h^2\, [\, f'(x_n) - f'(x_0) \,].$$

Ces encadrements proviennent des résultats sur l'approximation de l'intégrale de f sur $[\, x_0 \,;\, x_n \,]$, c'est-à-dire $F(x_n) - F(x_0)$, par la méthode des rectangles (qui donne $G(x_n) - G(x_0)$), et par la méthode des trapèzes.

On voit donc que, dans le cas d'une fonction monotone, l'erreur commise en approchant en x_n la primitive de f par la méthode d'Euler appliquée à partir du point x_0, est proportionnelle au pas h, et également proportionnelle à la variation de la fonction f elle-même entre x_0 et x_n, le facteur restant étant approximativement $\frac{1}{2}$. La méthode d'Euler est donc d'autant plus précise que les variations de f sont modérées.

Remarquons aussi que l'évaluation que l'on fait de l'erreur commise peut conduire à une meilleure méthode pour approcher F à partir de f, qui correspondrait cette fois à la méthode d'intégration par des trapèzes, et non plus par des rectangles.

Équipe Académique Mathématiques, Académie de Bordeaux

Justification

Construction de la fonction d'Euler

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un réel de I. On cherche à déterminer graphiquement une fonction F vérifiant : $F' = f$ *avec* $F(x_0) = y_0$., donc à résoudre sur I l'équation différentielle : $y' = f$ avec la condition initiale : $F(x_0) = y_0$.

Supposons qu'une telle fonction F existe ; puisque l'on a : $F' = f$, on a pour tout réel x de I :

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x).$$

On a donc, pour h petit, $F(x+h) - F(x) \approx f(x)\,h$, ou encore : $F(x+h) \approx F(x) + f(x)\,h$.

Choisissons une valeur du réel h, positive et proche de 0.

On a donc en particulier : $F(x_0+h) \approx F(x_0) + f(x_0)\,h = y_0 + f(x_0)\,h$ ce qui nous donne une valeur approchée de $F(x_0+h)$, que l'on va noter : $G(x_0+h)$.

On a donc : $F(x_0+h) \approx G(x_0+h) = y_0 + f(x_0)\,h$

De même :

$F(x_0+h+h) \approx G(x_0+h) + f(x_0+h)\,h = y_0 + f(x_0)\,h + f(x_0+h)\,h$, ce qui donne une valeur approchée de $F(x_0+2\,h)$, que l'on notera : $G(x_0+2h)$, égale à $y_0 + f(x_0)\,h + f(x_0+h)\,h$

et ainsi de suite, on détermine de proche en proche $G(x_0+n\,h)$, pour n entier.

Majoration de l'erreur commise :

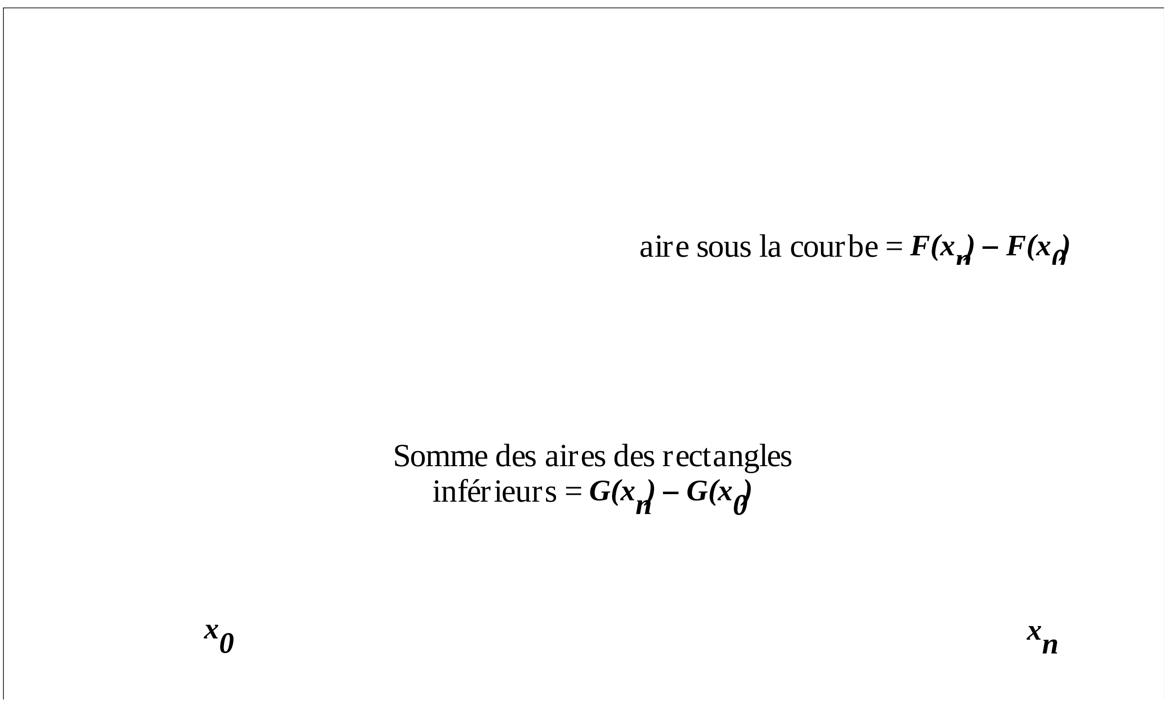
Posons : $x_n = x_0 + n\,h$,

$F(x_n) - F(x_0)$ est l'intégrale de la fonction f de x_0 à x_n.

D'autre part, G étant la fonction construite comme ci-dessus, on a :

$$G(x_n) - G(x_0) = G(x_0+n\,h) - G(x_0) = \sum_{k=0}^{k=n-1} f(x_0+k\,h)\,h\,.$$

$G(x_n) - G(x_0)$ est donc une approximation de l'intégrale $F(x_n) - F(x_0)$ par la méthode des rectangles. Voir la figure ci-dessous.



Posons : $E(x_n) = G(x_n) - F(x_n)$; alors $E(x_n) = [\ G(x_n) - G(x_0)\ ] - [\ F(x_n) - F(x_0)\ ]$.
Donc, $E(x_n)$ est l'erreur commise en approchant l'intégrale par la somme des aires des rectangles.
La majoration : $|\ E(x_n)\ | \leq h\ |\ f(x_n) - f(x_0)\ |$ est alors immédiate, dans le cas où f est monotone sur I, en encadrant f par deux fonctions en escalier sur l'intervalle $[\ x_0\ ;\ x_n\ ]$.
Pour préciser l'erreur commise, on peut approcher l'intégrale par la méthode des trapèzes. On voit alors que $E(x_n)$ est approximativement égale à la différence entre l'aire des trapèzes $T(x_n)$, et l'aire des rectangles, donc que $E(x_n)$ est proche de la somme des aires des triangles, qui est : $\frac{1}{2} h\ [\ f(x_n) - f(x_0)\ ]$.
De plus, si f' est monotone sur I, c'est un résultat classique que $[\ F(x_n) - F(x_0)\ ] - T(x_n)$ est compris entre 0 et $-\frac{1}{8} h^2 [\ f'(x_n) - f'(x_0)\ ]$; en ajoutant à ces trois expressions l'aire des triangles, qui est égale à $T(x_n) - [\ G(x_n) - G(x_n)\ ]$, on établit que $E(x_n)$ est comprise entre :

$$\frac{1}{2} h\ [\ f(x_n) - f(x_0)\ ] \text{ et } \frac{1}{2} h\ [\ f(x_n) - f(x_0)\ ] - \frac{1}{8} h^2 [\ f'(x_n) - f'(x_0)\ ].$$