

Constructions à la règle et au compas

Destination

Professeurs

Type

Papier

Niveau

Première L, option facultative

Extraits du programme

Première L enseignement optionnel

| Contenus | Modalités | Commentaires |
|--|---|--|
| Géométrie plane Constructions et tracés (" <i>à la règle et au compas</i> ") Constructions de polygones réguliers (à n côtés pour $n = 3, 4, 6, 8, 12$). Problèmes de construction | On s'appuiera sur les transformations étudiées jusqu'en seconde, y compris les agrandissements et réductions ; on rappellera avec précision les propriétés utilisées. On utilisera les propriétés des angles géométriques (y compris le théorème de l'angle inscrit). On traitera des exemples tels que : cercle de rayon donné passant par un point donné et tangent à une droite donnée (ou tangents à deux droites) ; cercle tangent à trois droites données ; triangle équilatéral inscrit (resp. circonscrit) dans un triangle donné ; construction de figures semblables à une figure donnée ; carré "inscrit" dans un demi-disque, dans un triangle ; tangente commune à deux cercles. | Dans tout ce paragraphe, on articulera avec soin tracés effectifs et justifications. On utilisera en particulier les logiciels de géométrie : ceux-ci dispensent des problèmes de tracés et leur utilisation nécessite l'explicitation a priori des propriétés traduisant l'énoncé. Cette utilisation s'intègre donc tout à fait dans la démarche de démonstration souhaitée ici. On pourra expliciter la méthode qui consiste à abandonner dans un premier temps une des contraintes du problème. |

Commentaires

Le premier document « Constructions à la règle et au compas » donne les définitions universitaires de « point, droite et cercle constructibles à la règle et au compas ». Elle est extraite du livre de J.C. Carrega « Théorie des corps ; la règle et le compas » éditions Hermann 1981. Il n'est bien évidemment pas question de la donner aux élèves. Cependant, le deuxième document intitulé « Une idée de démarrage ... » donne une progression possible du cours qui reprend, dans la définition de Carrega, l'idée de « points de base ».

Avec successivement deux, puis trois et enfin quatre points de base, on liste les constructions élémentaires c'est-à-dire celles que les élèves n'auront pas à détailler dans leurs explications ; après chaque cas, des exercices sont proposés.

Auteur

Équipe Académique Mathématiques, Bordeaux, janvier 2002

Constructions à la règle et au compas : définition

Définition donnée par J.C Carrega dans : « Théorie des corps ; la règle et le compas » éditions Hermann 1981.
Soit \mathbf{P} un plan euclidien et (B) un sous ensemble fini de \mathbf{P} ayant au moins deux éléments.

Les éléments de B sont appelés points de base.

Un point M de \mathbf{P} est dit constructible à la règle et au compas à partir de (B) s'il existe une suite finie de points de \mathbf{P} se terminant par M : $M_1, M_2, \dots, M_n = M$ telle que pour tout i ,

$1 \leq i \leq n$, M_i est un point d'intersection

- soit de deux droites
- soit d'une droite et d'un cercle
- soit de deux cercles,

ces droites et cercles étant obtenus à l'aide de l'ensemble $E_i = (B) \cup \{M_1, M_2, \dots, M_{i-1}\}$ de la façon suivante :

- chaque droite passe par deux points distincts de E_i
- chaque cercle est centré en un point de E_i et a pour rayon la distance entre deux points de E_i .

Une droite passant par deux points constructibles est dite constructible.

Un cercle centré en un point constructible et ayant pour rayon la distance entre deux points constructibles est dit constructible.

Remarque

Chaque point de base est constructible à la règle et au compas à partir de (B) . Cela pourrait être une simple convention venant compléter la définition précédente ; en fait cette convention n'est pas nécessaire car si $B \in (B)$ et si B' est un autre point de (B) alors B est un point d'intersection de la droite (BB') et du cercle de centre B' et de rayon BB' .

Une idée de démarrage du cours sur les constructions et tracés à la règle et au compas.

Construction à la règle et au compas : définition par questions réponses

- Où s'effectue la construction?
- Quelles sont les seuls outils autorisés ?
- Quelles sont les données de base de la construction?
- Quel est le but du jeu?

Construction à la règle et au compas : le pourquoi.

- Autrefois
- Aujourd'hui

Constructions élémentaires à partir de deux points de base A et B.

- La droite (AB).
- Le cercle de centre A, de rayon AB (et le cercle de centre B, de rayon AB).
- L'image du point B par la symétrie de centre A (et l'image de A par la symétrie de centre B).
- La médiatrice de [AB].
- Le milieu de [AB].
- Le cercle de diamètre [AB].
- La droite perpendiculaire en A à la droite (AB) (et la droite perpendiculaire en B à la droite (AB)).

Exercices possibles à ce stade du cours

1) Deux points A et B sont donnés sur la feuille.

Construire à la règle et au compas un point M tel que

- $M \in (AB)$ et $MA = 2 MB$
- ABM équilatéral
- ABM isocèle en A puis en M
- ABM rectangle en A puis en M
- ABM rectangle isocèle en A puis en M
- $\widehat{AMB} = 60^\circ$ (les élèves pourraient penser à un triangle équilatéral)
- $\widehat{AMB} = 60^\circ$ et ABM non équilatéral
- $\widehat{AMB} = 45^\circ$ (les élèves pourraient penser à un triangle rectangle isocèle en A ou en B)
- $\widehat{AMB} = 45^\circ$ et ABM non rectangle.

2) Un cercle C de centre O et un point A de ce cercle sont dessinés sur la feuille.

Construire à la règle et au compas la tangente en A au cercle C.

3) Un cercle C de centre O et un point A extérieur à C sont dessinés sur la feuille.

Construire à la règle et au compas une tangente au cercle C, passant par A.

Constructions élémentaires à partir de trois points de base A, B et C.

(Sauf dans la dernière construction, les points A, B et C peuvent être alignés)

- Un point M tel que $AM = BC$. (report d'une longueur dans n'importe quelle direction)
- Le point M tel que ABCM est un parallélogramme.
- La droite passant par A et parallèle à la droite (BC).
- La droite passant par A et perpendiculaire à la droite (BC).
- Le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC).
- L'image du point A par la translation de vecteur \overrightarrow{BC} .
- L'image du point A par la symétrie d'axe (BC).
- La bissectrice de l'angle \widehat{BAC}

Exercices possibles à ce stade du cours

1) Trois points non alignés A, B et C sont donnés sur la feuille.

Construire

- les droites remarquables du triangle ABC
- le centre de gravité du triangle ABC
- le cercle circonscrit et le cercle inscrit au triangle ABC
- un triangle dont les milieux des côtés sont A, B et C.

2) Un « rond », c'est-à-dire un cercle dont on a perdu le centre est dessiné sur la feuille.

Construire à la règle et au compas le centre de ce cercle.

3) Tracer l'image d'une droite ou d'un cercle par translation ou symétrie axiale.

Constructions élémentaires à partir de quatre points de base A, B, C et D

- Deux points E et F tels que $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$ (report d'angle).
- L'image du point D par la rotation de centre A, d'angle \widehat{BAC} .
- Un triangle MNP tel que $MN = AB$, $NP = BC$ et $PM = CD$ (triangle de longueurs des côtés données).

Exercice possible à ce stade du cours

Quatre points A, B, C et D sont donnés sur la feuille.

Construire à la règle et au compas un quadrilatère dont A, B, C et D sont les milieux des côtés.

Partage d'un segment [AB]

Construire des points sur le segment [AB] le partageant en n segments de même longueur en prenant successivement $n = 5$ (Thalès), $n = 3$ (Thalès ou propriété du centre de gravité), $n = 4$ (Thalès ou trois milieux).

Exercices possibles à ce stade du cours.

Deux points A et B sont donnés sur la feuille.

Construire à la règle et au compas un point M tel que

- $M \in [AB]$ et $AM = (3/7) AB$
- $M \in [AB]$ et $MA = 2 MB$

- $M \in (AB)$ et $AM = (3/7) AB$
- $M \in (AB)$ et $MA = 2 MB$

Construction à la règle et au compas de polygones réguliers

1) Construire un triangle équilatéral

- sans contrainte
- dont on connaît un côté
- dont on connaît le cercle circonscrit
- dont on connaît le cercle inscrit
- dont on connaît une hauteur.

2) Construire un carré et un hexagone, un octogone un dodécagone réguliers (voir le document d'accompagnement).

On peut faire remarquer aux élèves que certains polygones réguliers ne sont pas examinés mais pour des raisons différentes :

- pentagone : possible mais trop difficile (?)
- heptagone, nonagone , ... : impossible.

Théorème de Gauss : un polygone régulier à n cotés est constructible à la règle et au compas, si et seulement si, la décomposition en facteurs premiers de n est de la forme $2^\alpha p_1 p_2 \dots p_k$ où p_1, p_2, \dots, p_k sont des nombres premiers de Fermat distincts et α un entier naturel quelconque.

Rappel : les nombres premiers de Fermat s'écrivent $2^{(2^m)} + 1$ mais les nombres de cette forme ne sont pas tous premiers.

Ainsi, les nombres de Fermat 3, 5, 17, 257, 65 537 successivement obtenus pour $m = 0, 1, 2, 3, 4$ sont premiers mais pour $m = 5$ par exemple, le nombre 4 294 967 297 ne l'est plus ($4\ 294\ 967\ 297 = 641 \times 6\ 700\ 417$).

Conséquence : la construction d'un polygone régulier à n côtés (n compris entre 3 et 50) n'est possible que pour n égal à 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 48.

Exercices possibles à ce stade du cours

Tous les exercices du document d'accompagnement