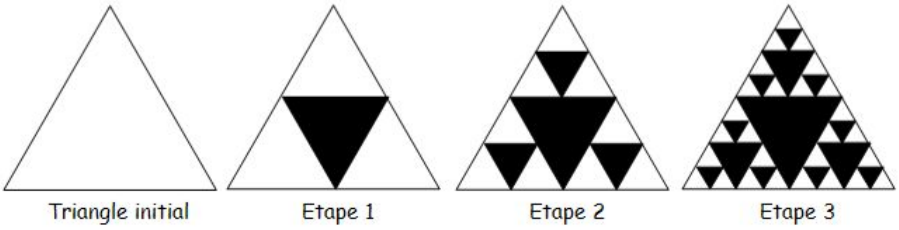
Triangles de Sierpinski

Fiche élève

On considère un triangle équilatéral de côté 10 cm.
A chaque étape, on construit dans chaque triangle équilatéral non coloré, le triangle équilatéral coloré (en noir) ayant pour sommets les milieux des côtés. Les schémas suivants montrent les étapes 1 à 3.



On note p_n et a_n le périmètre et l'aire de la surface colorée à l'étape n.
L'objectif est d'étudier le sens de variation et les limites éventuelles des deux suites (p_n) et (a_n).

Première partie : Calcul des termes des suites (p_n) et (a_n)

Ouvrir le fichier triangles_sierpinski.ods et compléter les colonnes par des formules :

- Entrer en colonne A les numéros des étapes.
- En colonne B, calculer le nombre de triangles colorés rajoutés à l'étape n.
- En colonne C, calculer le périmètre d'un triangle rajouté à l'étape n.
- En colonne D, calculer le périmètre de la surface colorée rajoutée à l'étape n.
- En colonne E, calculer le périmètre de la surface colorée à l'étape n.
- En colonne F, calculer l'aire d'un des triangles colorés rajoutés à l'étape n.
- En colonne G, calculer l'aire des triangles colorés rajoutés à l'étape n.
- En colonne H, calculer l'aire totale colorée à l'étape n.

Deuxième partie : Conjectures sur le sens de variation et les limites éventuelles des suites (p_n) et (a_n)

- Quelle conjecture peut-on faire sur le sens de variations de la suite (a_n) ?
- Quelle conjecture peut-on faire sur le sens de variations de la suite (p_n) ?
- Quelle est le périmètre de la surface colorée à l'étape 20 ?
- A partir de quelle valeur de n le périmètre p_n est-t-il supérieur à 100 000 m ?
- A partir de quelle valeur de n le périmètre p_n est-t-il supérieur à 4 000 000 m ?
- La suite (p_n) admet-elle une limite ?
- A partir de quelle valeur de n l'aire de la surface colorée a_n est-elle située dans l'intervalle $\left[43{,}29;25\sqrt{3}\right]$?
- A partir de quelle valeur de n l'aire de la surface colorée a_n est-elle située dans l'intervalle $\left[43{,}30;25\sqrt{3}\right]$?
- Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite (a_n) ?

Troisième partie : Mathématisation du problème

On note b_n l'aire non colorée à l'étape n.

1) Justifier que : $b_{n+1} = \frac{3}{4} b_n$ pour tout $n \geq 1$.
2) En déduire l'expression de b_n en fonction de n.
3) En déduire l'expression de a_n en fonction de n.
4) Étudier le sens de variation de la suite (a_n) et calculer la limite de la suite (a_n).