Suites arithmético-géométrique

Fiche élève

Problème

Etudier les suites définies par la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ (appelées suites arithmético-géométriques) en fonction de leur premier terme u_0 et des paramètres a *et* b

Partie A : Examiner des cas particuliers

Sans utiliser les TICE, étudier la nature de la suite (u_n) dans les cas particuliers $a = 1$ puis $b = 0$.

Partie B : Étude de deux exemples à l'aide du tableur

Exemple 1 : $u_0 = -2$, $a = \frac{1}{2}$ et $b = 1$

a. Calculer les valeurs de la suite (u_n) dans la colonne « u_n » en utilisant les adressages des cellules et non les nombres afin de faire varier ultérieurement les valeurs de u_0 et des paramètres a *et* b.

b. En observant les valeurs des termes u_n, conjecturer la monotonie et la convergence de la suite (u_n).

c. Réaliser une représentation graphique de la suite (u_n) et vérifier les conjectures précédentes.

d. On fait varier u_0 :
   Pour quelle valeur de u_0, la suite (u_n) est-elle constante ?
   Lorsque u_0 varie, que peut-on dire de la monotonie et de la convergence de la suite (u_n).

Exemple 2 : reprendre le même travail pour $u_0 = -2$, $a = 2$ et $b = 1$.

On fait varier u_0 :
   Pour quelle valeur de u_0 la suite (u_n) est-elle constante ?
   Lorsque u_0 varie, que peut-on dire de la monotonie et de la convergence de la suite (u_n) ?

Partie C : Etude mathématique (devoir à la maison)

1. **Dans l'exemple 1**, étudier la nature de la suite (v_n) définie par : $v_n = u_n - 2$, en déduire la monotonie et la convergence de la suite (u_n) et retrouver les résultats conjecturés dans la partie B 1.
2. **Dans l'exemple 2**, étudier la nature de la suite (v_n) définie par : $v_n = u_n + 1$, en déduire la monotonie et la convergence de la suite (u_n) et retrouver les résultats conjecturés dans la partie B 2.
3. **Cas général** : on suppose $a \neq 1$.
   Soit (u_n) la suite définie par récurrence par la donnée de u_0 et de la relation : $u_{n+1} = au_n + b$.
   On pose $v_n = u_n - \alpha$ où α est un réel fixé.

   a. Déterminer la valeur de α pour que la suite (v_n) soit géométrique.

   b. Pour la valeur de α trouvée précédemment, étudier la convergence de la suite (v_n) puis celle de la suite (u_n) suivant les valeurs de a. On illustrera les différents cas en exploitant la représentation graphique d'une suite récurrente donnée par la calculatrice.