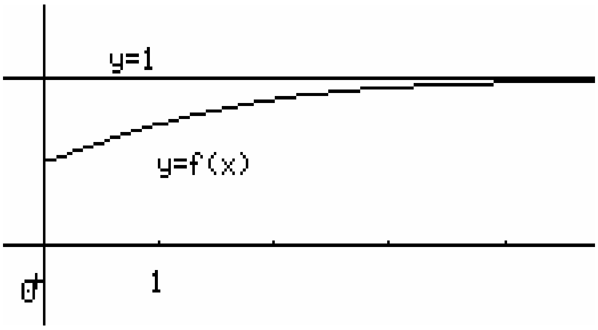
## Exercice 1  ( 4 points)

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$ et représentée dans le repère ci-dessous.




1°) Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$.

2°) Soit la suite $(U_n)$ définie pour n>0 par $U_n = \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} f(x)\,dx$

a) Calculer $U_1$ et $U_2$ . Exprimer $U_n$ en fonction de n.

b) Que représente graphiquement le nombre $U_n$ ?

3°) Montrer que $(U_n)$ est une suite décroissante positive.
Calculer la limite de cette suite.

4°) On pose $S_n = U_1 + U_2 + ....... U_n$

a)Calculer $S_1$ , $S_2$ , $S_3$ et exprimer $S_n$ en fonction de n.

b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ .

## Exercice n°2 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ orthonormé direct .
(Unité graphique 4 cm).

On désigne par $\theta$ un nombre réel tel que $-\pi < \theta < +\pi$ .

On appelle A, M et N les points d'affixes respectives 1, $e^{i\theta}$ et $1 + e^{i\theta}$ .

On désigne par (C) le cercle de centre O et de rayon 1, et par (C') le cercle de centre A et de rayon 1.

1°) Tracer (C) et (C'), et placer A, M et N dans le cas où $\theta = \frac{\pi}{6}$ .

2°) Montrer que N appartient à (C') et donner la nature du quadrilatère OANM.
Déterminer un argument de $1 + e^{i\theta}$.

3°) On pose $u = 1 + e^{i\theta}$ avec $-\pi < \theta < +\pi$ .

a) Montrer que u est solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation:

$$z^2 - (2 + 2\cos\theta)\, z + 2 + 2\cos\theta = 0.$$

En déduire la seconde solution de cette équation.

b) Quelles sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation: $z^2 - 3z + 3 = 0$ ?

4) On considère l'équation (E) : $z^2 - a z + a = 0$ où a est un nombre réel tel que $0 < a \leq 4$.
On nomme R le point d'affixe a, et T le milieu de [OR].
La perpendiculaire à l'axe réel passant par T coupe (C') en deux points U et U'.
Montrer que les affixes de U et de U' sont les solutions de (E).

## Exercice n°2 ( 5 points)

Dans le plan orienté, on considère un losange AIBK non aplati.

On pose ( $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AK}$ ) = $\alpha$ (modulo $2\pi$).

On désigne par $R_A$ la rotation de centre A et d'angle $\alpha$

et par $R_B$ la rotation de centre B et d'angle $\alpha$.

1°/ a) Comparer les angles orientés ( $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AK}$ ) et ( $\overrightarrow{BK}$, $\overrightarrow{BI}$ ).

b) Préciser la nature et les éléments géométriques de $R_B \circ R_A$.

2°/ On désigne par $(C_1)$ le cercle de centre I qui passe par A, et par $(C_2)$ le cercle de centre K qui passe par A.

On considère un point M de $(C_1)$, distinct de A et de B, et tel que la droite (MB) ne soit pas tangente à $(C_2)$.

On pose M' = $R_A$(M).

a) Préciser une mesure de l'angle ($\overrightarrow{IM}$, $\overrightarrow{KM'}$ ) .

b) Exprimer ($\overrightarrow{IM}$, $\overrightarrow{IA}$ ) en fonction de ($\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{BA}$ ).

Montrer que ($\overrightarrow{IM}$, $\overrightarrow{IA}$ ) + ( $\overrightarrow{KA}$, $\overrightarrow{KM'}$ ) = 2 ($\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{BM'}$ ) (modulo $2\pi$)

c) Montrer que les trois points B, M et M' sont alignés.

3°/ On considère un point P de $(C_2)$ distinct de A et de B, et tel que les droites (AP) et (BP) ne soient pas tangentes à $(C_1)$.

Les droites (PA ) et (PB) recoupent le cercle $(C_1)$ respectivement en Q et N.

En utilisant ce qui précède, montrer que l'angle ( $\overrightarrow{IN}$, $\overrightarrow{IQ}$ ) est indépendant du choix de P.

## Problème (11 points)

***Avertissement : l'usage d'une calculatrice n'est pas nécessaire pour traiter la partie C.***

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x \ln x - 2 \ln x - (\ln x)^2$,
on note f ' sa fonction dérivée et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x$.

Dans un repère orthogonal donné, on appelle $\Gamma$ la représentation graphique de f ,
$\Gamma$ ' la représentation graphique de f '
et $\Delta$ celle de g.

Voici ces trois courbes sur l'écran d'une calculatrice pour x compris entre 0 et 5 .

### A- Étude de f.

1) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

2) Montrer que $f'(x) = \left(1 - \frac{2}{x}\right)(1 + \ln x)$.

3) En déduire le sens de variation de f.

4) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet trois solutions.
Donner un encadrement de longueur $10^{-2}$ pour les deux solutions non entières.

### B- Intersection des représentations graphiques de f et de g

1) Reproduire sur la copie et compléter le tableau des valeurs suivant en donnant les résultats à $10^{-2}$ près.

| Point de $\Gamma$ | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0,05 | 0,25 | $e^{-1}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| f(x) | | | | | | | | | | |

2) On veut déterminer si la courbe représentative de f coupe la droite $\Delta$ pour $0 < x < 7$.
Que peut-on, à l'aide de sa calculatrice, conjecturer ?
Préciser les éléments qui permettent de faire cette conjecture.(noter le type de calculatrice utilisée).

3) On s'intéresse aux solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ appartenant à l'intervalle $[7; +\infty[$.

a) Montrer que $f'$ est une fonction croissante sur $[7; +\infty[$.

b) En déduire que $f'(x) > 2{,}1$ pour tout $x$ appartenant à $[7; +\infty[$.

c) Montrer que l'équation $f(x) = g(x)$ admet une solution unique sur $[7; +\infty[$.
(on pourra utiliser le sens de variation de la fonction h définie sur $[7; +\infty[$ par :
$h(x) = f(x) - 2x$ )

**Dans la suite, on notera $\alpha$ cette solution.**

4) Mise en évidence de $\alpha$ sur un graphique.

Choisir un nombre entier a tel que $a < \alpha < a + 5$.

Sur papier millimétré, on trace un carré de 10 cm de côté.
Le sommet inférieur gauche représentera le point de coordonnées $(a;2a)$ et le sommet diagonalement opposé le point de coordonnées $(a + 5; 2(a + 5))$.

Tracer dans ce carré $\Gamma$ et $\Delta$.
Mettre le nombre $\alpha$ en évidence sur le graphique et en donner une valeur approchée.

**C- Calcul de probabilité.**

Dans cette partie, on se réfère au tableau des valeurs construit dans la partie B.1)
Les trois questions sont indépendantes.
Pour chacune des trois questions, les choix effectués sont équiprobables.

On place les 4 points A, C, H et J dans un repère, et on les relie à l'aide de 3 segments formant une ligne brisée continue (par exemple la ligne brisée AHJC).

a) Combien de lignes brisées différentes peut-on former ainsi ?
(AHJC et CJHA représentent la même ligne brisée)

b) On choisit l'une de ces lignes brisées.
Quelle est la probabilité d'obtenir la représentation graphique d'une fonction ?

On choisit cinq points parmi les dix du tableau ; on les relie, suivant l'ordre de leurs abscisses croissantes, à l'aide de segments formant une ligne brisée.
Quelle est la probabilité d'obtenir une ligne qui ne coupe pas l'axe des abscisses ?
(le point D peut être choisi).

3) On choisit cinq points consécutifs parmi les dix (par exemple BCDEF).

a) Combien y a-t-il de possibilités ?

b) On échange l'abscisse et l'ordonnée de chacun de ces cinq points.
Les nouveaux points ainsi obtenus sont joints à l'aide de segments dans l'ordre de leurs ordonnées croissantes.
Quelle est la probabilité d'obtenir la représentation graphique d'une fonction ?