ELEMENTS DE CORRECTION DU DEVOIR COMMUN DE MATHÉMATIQUES DES CLASSES DE SECONDE

Exercice 1 1.C ; 2.A ; 3.C ; 4.C ; 5.B ; 6.B ; 7.B ; 8.A ; 9.B ; 10.A

Exercice 2 ***Partie I :*** 1. $f(2) = 0$; $g\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$.

2. Les antécédents de $\frac{3}{2}$ par f sont –1 et 3. –1 n'a pas d'antécédent par f.

$-\frac{5}{2}$ a un antécédent par g : c'est –1. Les antécédents de 2 par g sont 0,5 et 2.

3.

x	–3		–1		1		4
variations de g	–1,5	$\searrow$	–2,5	$\nearrow$	2,5	$\searrow$	1,2

4. Le maximum de g sur [–3 ; 4] est 2,5 ; il est atteint en 1.

5.

x	–3		0		2		4
signe de $f(x)$		+	0	–	0	+	

6. Les solutions de l'inéquation $g(x) > 2$ sont les abscisses des points de C_g d'ordonnée strictement supérieure à 2. S =]0,5 ; 2[.
7. Les solutions de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$ sont les abscisses des points de C_f situés au-dessus de C_g. S = [–3 ; 0] ∪ [3 ; 4].

Partie II : 1. $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}\times\frac{4}{9} - \frac{2}{3} = \frac{2}{9} - \frac{2}{3} = \frac{2}{9} - \frac{6}{9} = -\frac{4}{9}$;

$f(2-\sqrt{3}) = \frac{1}{2}(2-\sqrt{3})^2 - (2-\sqrt{3}) = \frac{1}{2}(4 - 2\times2\times\sqrt{3} + \sqrt{3}^2) - 2 + \sqrt{3}$;

$f(2-\sqrt{3}) = \frac{1}{2}(4 - 4\sqrt{3} + 3) - 2 + \sqrt{3} = \frac{1}{2}(7 - 4\sqrt{3}) - 2 + \sqrt{3} = \frac{7}{2} - 2\sqrt{3} - 2 + \sqrt{3}$;

$f(2-\sqrt{3}) = \frac{3}{2} - \sqrt{3}$.

2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x\left(\frac{1}{2}x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $\frac{1}{2}x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $\frac{1}{2}x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$. Graphiquement, les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de C_f et de l'axe des abscisses.

3. a) $\frac{1}{2}[(x-1)^2 - 1] = \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1 - 1) = \frac{1}{2}(x^2 - 2x) = \frac{1}{2}x^2 - x = f(x)$.

b) Si $1 \leq c \leq d$, alors $0 \leq c - 1 \leq d - 1$, en retranchant 1 à chaque membre,
alors $(c-1)^2 \leq (d-1)^2$, car la fonction carré est croissante sur [0 ; +∞[,
alors $(c-1)^2 - 1 \leq (d-1)^2 - 1$, en retranchant 1 à chaque membre,
alors $\frac{1}{2}[(c-1)^2 - 1] \leq \frac{1}{2}[(d-1)^2 - 1]$, en multipliant chaque membre par $\frac{1}{2} > 0$.

On en déduit que la fonction f est croissante sur l'intervalle [1 ; 4].

4. a) $x - 3$ est de la forme $ax + b$ avec $a = 1 > 0$ et s'annule pour $x = 3$.
$x + 1$ est de la forme $ax + b$ avec $a = 1 > 0$ et s'annule pour $x = -1$.

x	$-\infty$		–1		3		$+\infty$
signe de $x - 3$		–	|	–	0	+	
signe de $x + 1$		–	0	+	|	+	
signe de $(x-3)(x+1)$		+	0	–	0	+	

On en déduit S =]–1 ; 3[.

b) $\frac{1}{2}(x-3)(x+1) = \frac{1}{2}(x^2 + x - 3x - 3) = \frac{1}{2}(x^2 - 2x - 3) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$.

c) $f(x) < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - x < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x-3)(x+1) < 0$ (d'après b)

$\Leftrightarrow (x-3)(x+1) < 0$ (en multipliant les deux membres par 2 > 0).
D'après a), S =]–1 ; 3[.

Exercice 3
2. D'une part, M ∈ (AB) et (AB) ⊂ (ABC) donc M ∈ (ABC).
D'autre part, M ∈ (IJ) et (IJ) ⊂ (IJK) donc M ∈ (IJK). M est donc un point commun des plans (ABC) et (IJK).
De même pour N car N ∈ (AC) ⊂ (ABC) et N ∈ (IK) ⊂ (IJK).
Finalement, (ABC) ∩ (IJK) = (MN).

3. D'après le théorème des milieux dans le triangle BDC, puisque J et K sont les milieux respectifs de [BD] et [CD], alors (JK) // (BC).
Or, (BC) ⊂ (ABC) donc (JK) // (ABC).

4. On a : (JK) // (BC) ; (JK) ⊂ (IJK) ; (BC) ⊂ (ABC) et (IJK) ∩ (ABC) = (MN).
Donc, d'après le théorème du toit, (MN) // (JK) // (BC).

Exercice 4
1. Les faces du pavé droit étant des rectangles, (AE) est perpendiculaire aux droites (EH) et (EF), qui sont deux droites sécantes contenues dans le plan (EFG).
Donc (AE) ⊥ (EFG).

2. (AE) ⊥ (EFG) et (EG) ⊂ (EFG) donc (AE) ⊥ (EG). Ainsi, le triangle AEG est rectangle en E.

3. On applique le théorème de Pythagore
* dans le triangle FEG rectangle en F : $EG^2 = EF^2 + FG^2 = 4^2 + 3^2 = 25$; EG = 5 cm.
* puis, dans le triangle AEG rectangle en E : $AG^2 = AE^2 + EG^2 = 2^2 + 5^2 = 29$;
$AG = \sqrt{29}$ cm.

Question bonus : Les quatre diagonales du carré mesurant chacune $\sqrt{29}$ cm, la somme de leurs carrés est 4×29 = 116. La somme des carrés des douze arêtes est égale à : $4\times2^2 + 4\times4^2 + 4\times3^2 = 4\times(4 + 16 + 9) = 4\times29 = 116$.