2^{nde} Corrigé du devoir commun de mathématiques du 14/01/2009

Exercice 1

1ère partie 1) vrai 2) faux 3) faux 4) vrai 5) faux

2ème partie 1) B 2) B 3) C 4) B 5) C 6) B

Exercice 2

Partie A

1. $f(-2) = 9$; $f(0) = 5$; $f(-5) = 0$.
2. Le nombre 0 admet deux antécédents par f : –5 et 1.
3. Les solutions de l'équation $f(x) = 5$ sont les abscisses des points de C d'ordonnée égale à 5 ; ce sont –4 et 0.
Les solutions de l'inéquation $f(x) < 5$ sont les abscisses des points de C d'ordonnée strictement inférieure à 5 ;
l'ensemble des solutions est $[-6 ; -4[\cup]0 ; 2]$.
4.

x	–6		–5		1		2
Signe de $f(x)$		–	0	+	0	–	

5. Le maximum de la fonction f sur [–6 ; 2] est 9 ; il est atteint en –2.
6.

x	–6	–2	2
Variations de f	–7 ↗	9	↘ –7

Partie B

1. $f(x) = 9 - (x + 2)^2 = 3^2 - (x + 2)^2 = [3 - (x + 2)](3 + x + 2)$;
$f(x) = (3 - x - 2)(x + 5) = (1 - x)(x + 5)$.
2. $f(x) = 9 - (x + 2)^2 = 9 - (x^2 + 4x + 4) = 9 - x^2 - 4x - 4 = -x^2 - 4x + 5$.
3. a) Avec $f(x) = -x^2 - 4x + 5$, $f(0) = = -0^2 - 4 \times 0 + 5 = 5$.
Avec $f(x) = (x + 5)(1 - x)$, $f(-5) = (-5 + 5)(1 - (-5)) = 0 \times 6 = 0$.
Avec $f(x) = 9 - (x + 2)^2$, $f(\sqrt{3} - 2) = 9 - (\sqrt{3} - 2 + 2)^2 = 9 - \sqrt{3}^2 = 9 - 3 = 6$.
b) $f(x) = 0$ équivaut à $(x + 5)(1 - x) = 0$ équivaut à $x + 5 = 0$ ou $1 - x = 0$
équivaut à $x = -5$ ou $x = 1$. $S = \{-5 ; 1\}$.
c) $f(x) = 5$ équivaut successivement à $-x^2 - 4x + 5 = 5$; $-x^2 - 4x = 0$;
$-x(x + 4) = 0$; $-x = 0$ ou $x + 4 = 0$; $x = 0$ ou $x = -4$. $S = \{-4 ; 0\}$

d) Pour tout $x \in [-6 ; 2]$, $f(x) = 9 - (x + 2)^2$ donc $f(x) - 9 = -(x + 2)^2$.
Or, le carré d'un réel étant toujours positif ou nul, $(x + 2)^2 \geq 0$
donc $-(x + 2)^2 \leq 0$ c'est-à-dire $f(x) - 9 \leq 0$, ce qui signifie que $f(x) \leq 9$.

Exercice 3

1. J ∈ (BF) et (BF) ⊂ (BCG) donc J ∈ (BCG). De même, K ∈ (CG) et (CG) ⊂ (BCG) donc K ∈ (BCG). Finalement, (JK) est incluse dans (BCG).
Comme (BC) l'est aussi, les droites (JK) et (BC) sont coplanaires.
On sait que J est le milieu de [BF]. Si (JK) et (BC) étaient parallèles, alors K serait le milieu de [CG]. Or, l'égalité $GK = \frac{2}{3} GC$ montre que K n'est pas le milieu de [CG]. Donc, (JK) et (BC) ne sont pas parallèles.
Comme elles sont coplanaires, alors elles sont sécantes.
2. b) M ∈ (JK), N ∈ (IJ) et (JK) et (IJ) sont contenues dans (IJK) donc M et N appartiennent au plan (IJK).
M ∈ (BC), N ∈ (AB) et (BC) et (AB) sont contenues dans (ABC) donc M et N appartiennent au plan (ABC).
Ainsi, les points M et N sont communs aux deux plans (IJK) et (ABC).
L'intersection de ces deux plans est donc la droite (MN).
3. (MN) ⊂ (IJK) donc les droites (IK) et (MN) sont coplanaires (incluses dans le plan (IJK)). Puisqu'elles ne sont pas parallèles, elles sont donc sécantes.
De plus, (MN) ⊂ (ABC) donc le point d'intersection des droites (IK) et (MN) appartient à (ABC) ; c'est le point P.

Questions bonus

1. D'après le théorème de Pythagore, $MN^2 = 3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$; $MN = \sqrt{13}$.
2. L'aire de chacune des cinq parts est égale à $\frac{125}{5} = 25$ cm².
Donc le côté de chaque part carrée est 5 cm.
Par ailleurs, comme l'aire du grand carré vaut 125 cm², son côté est égal à $\sqrt{125}$ cm c'est-à-dire $5\sqrt{5}$ cm.
La longueur du plus petit côté du « L » est donc $5\sqrt{5} - 2 \times 5$ cm,
soit $5\sqrt{5} - 10$ cm.