Correction du devoir commun du 19 mai

Exercice 1

1) Il fallait choisir la réponse b. En effet :

$$(x-1)^2 = 3$$

$$(x-1)^2 - 3 = 0$$

$$\left(x-1-\sqrt{3}\right)\left(x-1+\sqrt{3}\right) = 0$$

Ce qui donne deux solutions.

2) Il fallait choisir la réponse b. En effet :

$$a \leq -2$$

$$a^2 \geq 4$$

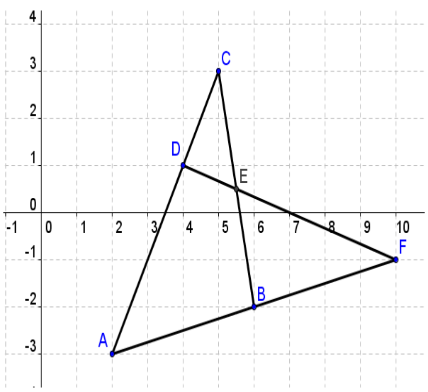
Car la fonction carré est décroissante sur $]-\infty\,;0]$.

3) Il fallait choisir la réponse a. En effet si $a \in [-2;5]$ alors $a \in [-2;0] \cup [0;5]$. Si $-2 \leq x \leq 0$ alors $4 \geq x^2 \geq 0$ car la fonction carré est décroissante sur $]-\infty\,;0]$. Inversement si $0 \leq x \leq 5$ alors $0 \leq x^2 \leq 25$ car la fonction carré est croissante sur $[0\,;+\infty[$. La réponse est donc $[0;4] \cup [0;25] = [0;25]$

4) La décroissance de la fonction inverse sur $]-\infty\,;0[$ donne la réponse b.

5) De même la décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;\infty[$ donne la réponse a.

Exercice 2



2) Il faut commencer par déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CA}$. On obtient $\overrightarrow{CD}\,(x_D-5; y_D-3)$ et $\overrightarrow{CA}\,(-3;6)$. Comme $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ on obtient alors les deux équations suivantes :

$$x_D - 5 = -1 \text{ et } y_D - 3 = -2.$$

Les coordonnées de D sont donc (4 ;1).

La formule des coordonnées du milieu nous donne :

$$x_E = \frac{6+5}{2} = \frac{11}{2} \text{ et } y_E = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2}$$

Ainsi E a pour coordonnées $(\frac{11}{2}\,;\frac{1}{2})$

B étant le mileu de [AF] on a :

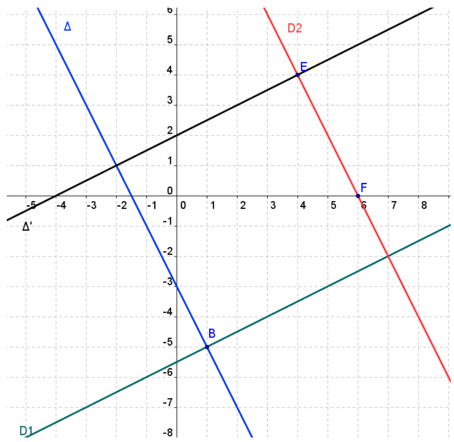
$$x_B = \frac{x_A + x_F}{2} \text{ et } y_B = \frac{y_A + y_F}{2}$$

Ce qui nous donne $x_F = 10$ et $y_F = -1$.

3) a) On obtient $\overrightarrow{DE}\,(1,5; -0,5)$ et $\overrightarrow{DF}\,(6;-2)$.

b) On a $\overrightarrow{DF} = 4\overrightarrow{DE}$, ces deux vecteurs sont donc colinéaires, les points D,E et F sont donc alignés.

Exercice 3



2) Les droites Δ et Δ' sont sécantes car elles ont un coefficient directeur différent. Soit M le point d'intersection de ces deux droites On a alors :

$$y_M = -2x_M - 3 \text{ et } y_M = \frac{1}{2}x_M + 2$$

Ainsi :

$$-2x_M - 3 = \frac{1}{2}x_M + 2$$

Ce qui donne $x_M = -2$ et donc $y_M = -2x_M - 3 = 4 - 3 = 1$. Les coordonnées de M sont donc (-2 ;1).

2) a) On a $-2x_B - 3 = -2 \times 1 - 3 = -5 = y_B$. B est donc sur la droite Δ.

b) D_1 étant parallèle à Δ', ces deux droites ont même coefficient directeur. L'équation de D_1 est donc $y = \frac{1}{2}x + b$. Comme B est sur cette droite on a :

$$y_B = \frac{1}{2}x_B + b$$

$$b = \frac{-11}{2}$$

L'équation de D_1 est donc $y = \frac{1}{2}x - \frac{11}{2}$

3) a) Les points E et F n'ayant pas le même abscisse l'équation de la droite D_2 est donc de la forme $y = ax + b$ avec $a = \frac{0-4}{6-4} = -2$. On a donc $y_F = -2x_F + b$ ce qui donne $b = 12$. L'équation de cette droite est donc $y = -2x + 12$.

b) Les droites Δ et D_2 ont même coefficient directeur, elles sont donc parallèles.

Exercice 4

1) L'étendue est : 1,9-1=0,9.

2) Le prix moyen est :

$$\frac{1\times1+1{,}1\times2+1{,}3\times14+1{,}4\times2+1{,}5\times6+1{,}8\times1+1{,}9\times1}{27}\approx 1,37.$$

3) Il faut d'abord déterminer les effectifs cumulés croissants :

Prix d'un café	1	1,1	1,3	1,4	1,5	1,8	1,9
Effectifs	1	2	14	2	6	4	1
E.C.C.	1	3	17	19	25	26	27

La série est de taille impaire ($27 = 2\times13+1$) la médiane est donc la donnée de rang $13+1=14$. La lecture du tableau nous donne alors une médiane de 1,3.

$\dfrac{27}{4}=6,75$ donc le premier quartile est la donnée de rang 7 qui est également 1,3.

$3\times\dfrac{27}{4}=20,25$ donc le troisième quartile est la donnée de rang 21 qui est 1,5.

4) a) Au moins 50% des prix pratiqués sont supérieurs à la médiane 1,3.

b) Au moins 75% des prix pratiqués sont inférieurs ou égaux au troisième quartile 1,5.

Exercice 5

Partie A

1) $\dfrac{1}{2}(x-2)^2+4=\dfrac{1}{2}\left(x^2-4x+4\right)+4=\dfrac{1}{2}x^2-2x+2+4=\dfrac{1}{2}x^2-2x+6=f(x)$.

2)

$$f(x)=4$$

$$\frac{1}{2}(x-2)^2+4=4$$

$$\frac{1}{2}(x-2)^2=0$$

$$x=2$$

L'antécédent de 4 par f est 2.

3)a)

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-3)(1-5x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b) $f(x)\geq 4,5$ équivaut à :

$$\frac{1}{2}(x-2)^2+4\geq 4,5$$

$$\frac{1}{2}(x-2)^2\geq 0,5$$

$$(x-2)^2\geq 1$$

c) $f(x)\geq 4,5$ équivaut à $(x-2)^2\geq 1$, ce qui donne :

$$(x-2)^2-1\geq 0$$

$$(x-1)(x-3)\geq 0$$

On se reporte au tableau de signes de la question 3 pour obtenir l'ensemble de solutions suivant :

$$\mathscr{S}=]-\infty\,;1]\cup[3\,;\infty[.$$

Partie B

1)a) $\mathscr{A}_{AFD}=2x$.

$\mathscr{A}_{BEF}=\dfrac{x(3-x)}{2}=\dfrac{-x^2+3x}{2}$.

$\mathscr{A}_{ECD}=\dfrac{3(4-x)}{2}=\dfrac{12-3x}{2}$.

b) $S(x)=\mathscr{A}_{BEF}+\mathscr{A}_{ECD}+\mathscr{A}_{AFD}=2x+\dfrac{-x^2+3x}{2}+\dfrac{12-3x}{2}=-\dfrac{1}{2}x^2+2x+6$.

c) L'aire du triangle EFD est égale à l'aire du rectangle ABCD diminuée de la somme des aires des triangles AFD,BEF et ECD. Ainsi :

$$A(x)=12-S(x)=12+\frac{1}{2}x^2-2x-6=\frac{1}{2}x^2-2x+6$$

On retrouve l'expression de la fonction f définie dans la partie A. F appartient au segment [AB], par conséquent $x\in[0;3]$, donc $A(x)=f(x)$ sur cet intervalle.

2) a) $A(x)=4$ équivaut à $f(x)=4$. On a vu précédemment que cette équation avait pour solution 2. E doit être placé au milieu du segment [BC] pour obtenir une aire égale à 4.

b) On est ramené ici à résoudre dans [0 ;3] l'inéquation $f(x)\geq 4,5$. On a vu que les solutions dans $\mathbb{R}$ de cette inéquation appartenaient à l'ensemble $]-\infty\,;1]\cup[3\,;\infty[$. Ainsi les solutions comprises dans l'intervalle [0 ;3] appartiennent donc à $[0\,;1]\cup\{3\}$.

Bonus

L'algorithme est composé d'une boucle "Tant que" dans laquelle est insérée une boucle "Si", le programme continuera tant que les nombres calculés seront différents de 1. Si on entre 6 comme valeur d'entrée le programme effectue donc le test de parité sur 6, 6 étant pair le programme remplace sa valeur par $\dfrac{6}{2}=3$. 3 étant différent de 1 le programme continue et réeffectue un test de parité sur 3 et cette fois-ci remplace 3 par $3\times3+1=10$. On continue ainsi de suite pour obtenir la suite suivante :

$$3\,;10\,;5\,;16\,;8\,;4\,;2\,;1$$

Le programme s'arrête alors car le dernier nombre calculé est 1.