Groupement B 1999

Exercice 1 (9 points)

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

Une entreprise de matériel pour l'industrie produit des modules constitués de deux types de pièces : P_1 et P_2.

1° Une pièce P_1 est considérée comme bonne si sa longueur, en centimètres, est comprise entre 293,5 et 306,5.

On note L la variable aléatoire qui, à chaque pièce P_1 choisie au hasard dans la production d'une journée, associe sa longueur. On suppose que L suit la loi normale de moyenne 300 et d'écart type 3.

Déterminer, à 10^{-2} près, la probabilité qu'une pièce P_1 soit bonne.

2° On note A l'événement : « une pièce P_1 choisie au hasard dans la production des pièces P_1 est défectueuse ».

On note de même B l'événement : « une pièce P_2 choisie au hasard dans la production des pièces P_2 est défectueuse ».

On admet que les probabilités des événements A et B sont $P(A) = 0{,}03$ et $P(B) = 0{,}07$ et on suppose que ces deux événements sont indépendants.

Un module étant choisi au hasard dans la production, calculer, à 10^{-4} près, la probabilité de chacun des événements suivants :

E_1 : « les deux pièces du module sont défectueuses » ;

E_2 : « au moins une des deux pièces du module est défectueuse » ;

E_3 : « aucune des deux pièces constituant le module n'est défectueuse ».

3° Dans un important stock de ces modules, on prélève au hasard 10 modules pour vérification. Le stock est assez important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 modules.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 10 modules, associe le nombre de modules réalisant l'événement E_3 défini au 2°.

On suppose que la probabilité de l'événement E_3 est 0,902.

a) Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale ; déterminer les paramètres de cette loi.

b) Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité que, dans un tel prélèvement, 9 modules au moins réalisent l'événement E_3.

4° Dans cette question on s'intéresse au diamètre des pièces P_2.

Soit $\bar{X}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 60 pièces P_2 prélevées au hasard et avec remise dans la production de la journée considérée, associe la moyenne des diamètres des pièces de cet échantillon. On suppose que $\bar{X}$ suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type $\dfrac{\sigma}{\sqrt{60}}$ avec $\sigma = 0{,}084$.

On mesure le diamètre, exprimé en centimètres, de chacune des 60 pièces P_2 d'un échantillon choisi au hasard et avec remise dans la production d'une journée ; on constate que la valeur approchée, arrondie à 10^{-3} près de la moyenne $\bar{x}$ de cet échantillon, est $\bar{x} = 4{,}012$.

a) À partir des informations portant sur cet échantillon, donner une estimation ponctuelle, à 10^{-3} près, de la moyenne μ du diamètre des pièces P_2 produites pendant cette journée.

b) Déterminer un intervalle de confiance centré en $\bar{x}$ de la moyenne μ des diamètres des pièces P_2 produites pendant la journée considérée, avec le coefficient de confiance 95%.

c) On considère l'affirmation suivante : « la moyenne μ est obligatoirement entre 3,991 et 4,033 ».

Peut-on déduire de ce qui précède qu'elle est vraie ?

Exercice 2 (11 points)

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

A.- Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y'' - 2y' + y = \frac{x^2}{2} - x - 1$$

où y désigne une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1° Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation différentielle

$$(E') : y'' - 2y' + y = 0 .$$

2° Déterminer les constantes réelles a, b, c pour que la fonction g, définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = a x^2 + b x + c$, soit une solution particulière de l'équation (E).

3° Déduire du 1° et du 2° l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4° Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie les conditions initiales :

$$f(0) = 0 \text{ et } f(1) = \mathrm{e} + \frac{3}{2} .$$

B. Étude d'une fonction

Soit f et g les deux fonctions de la variable réelle x définies sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^x + \frac{x^2}{2} + x \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x^2}{2} + x .$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f et $\mathcal{P}$ la courbe représentative de g dans le plan muni du repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

1° Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - g(x)]$

Interpréter graphiquement le dernier résultat.

2° Étudier sur 3 la position relative des deux courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$.

3° a) Démontrer que pour tout x de $\mathbf{R}$:

$$f'(x) = (x+1)\,(\mathrm{e}^x + 1) .$$

b) Étudier les variations de f sur $\mathbf{R}$.

4° a) Compléter le tableau de valeurs figurant en annexe (à rendre avec la copie) ; les valeurs approchées seront arrondies à 10^{-2} près.

b) Construire la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sur la feuille annexe (à rendre avec la copie) où figure la courbe $\mathcal{P}$.

5° a) Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que la valeur exacte, en cm², de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, la parabole $\mathcal{P}$ et les droites d'équations $x = -3$ et $x = -2$ est $A = 4\left(-4\,e^{-3} + 3\,e^{-2}\right)$.

b) Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de A.

ANNEXE (à rendre avec la copie)

4° a)

x	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1
$f(x)$									

b)