

# BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR

SPECIALITES	COEF.	DUREE
ELECTROTECHNIQUE	1	3
GENIE OPTIQUE	3	3
INFORMATIQUE ET RESEAUX POUR L'INDUSTRIE ET LES SERVICES TECHNIQUES	3	3

## MATHEMATIQUES

Le sujet comprend 4 pages, numérotées de 1/4 à 4/4.  
Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.  
Il comprend 7 pages, numérotées de 1 à 7.

*La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.*

**Code sujet : MATGRA2**

**Exercice 1****(8 points)**

Les questions 1°), 2°) et 3°) peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Une entreprise fabrique des pièces. Ces pièces sont considérées comme conformes si leur longueur est comprise entre 79,8 mm et 80,2 mm.

1°) On note  $L$  la variable aléatoire qui, à chaque pièce fabriquée, associe sa longueur en mm. On admet que la variable  $L$  suit une loi normale de moyenne 80 et d'écart type 0,0948. On prélève une pièce au hasard dans la production. Déterminer, en utilisant la table de la loi normale centrée réduite, la probabilité que cette pièce soit conforme.

2°) On admet que si on prélève, au hasard, une pièce dans la production, la probabilité que cette pièce ne soit pas conforme est  $p = 0,035$ .

a) On note  $X$  la variable aléatoire représentant le nombre de pièces défectueuses dans un lot de 100 pièces. Les pièces sont prélevées au hasard et le tirage est assimilé à un tirage avec remise. Justifier que  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n = 100$  et  $p = 0,035$ .

b) Le tableau ci-dessous donne la probabilité des événements «  $X = k$  » pour  $k$  variant de 0 à 9, à l'exception de l'événement «  $X = 2$  ».

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(X = k)$	0,0284	0,1029		0,2188	0,1924	0,1340	0,0770	0,0375	0,0158	0,0059

On considère les événements :

$A$  : « le nombre de pièces défectueuses du lot est égal à 2 » ;

$B$  : « le nombre de pièces défectueuses du lot est au moins égal à 2 ».

Calculer  $P(A)$  au dix millièmes près, puis  $P(B)$  au millièmes près.

c) Un lot de 100 pièces est envoyé à un client, le lot est accepté s'il contient au plus 4 pièces défectueuses.

En utilisant le tableau ci-dessus, déterminer, au millièmes près, la probabilité que le client refuse ce lot.

d) En utilisant le tableau ci-dessus, déterminer la plus petite valeur entière  $n$  telle que  $P(X > n) < 0,03$ .

3°) L'entreprise souhaite améliorer la qualité de la production. Pour cela on projette de changer le processus de fabrication des pièces.

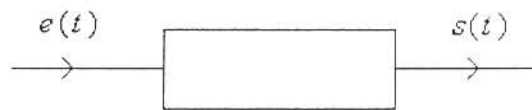
On définit alors une nouvelle variable  $L_1$  qui à chaque pièce à construire selon le nouveau processus associera sa longueur en mm.

La variable aléatoire  $L_1$  suit une loi normale de moyenne  $m = 80$  et d'écart type  $\sigma'$ .

Déterminer  $\sigma'$  pour que, en prenant une pièce au hasard dans la future production, la probabilité d'obtenir une pièce conforme soit égale à 0,99.

## Exercice 2 (12 points)

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.



Dans le système représenté ci-dessus,  $e$  et  $s$  sont respectivement les signaux d'entrée et de sortie, causaux (nuls pour  $t$  négatif).

On suppose que le système est régi par l'équation différentielle :

$$LC \frac{d^2 s}{dt^2}(t) + RC \frac{ds}{dt}(t) + s(t) = e(t) \quad (1).$$

$L$ ,  $R$  et  $C$  sont des constantes réelles strictement positives. De plus à l'instant initial :

$$s(0^+) = 0 \text{ et } \frac{ds}{dt}(0^+) = 0.$$

### PARTIE A

On suppose que les fonctions  $e$  et  $s$  admettent des transformées de Laplace notées respectivement  $E$  et  $S$ .

1°) La fonction de transfert  $H$  du système est définie par  $S(p) = H(p) \times E(p)$ .

En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation (1), exprimer  $H(p)$  en fonction de  $R$ ,  $L$  et  $C$ .

2°) On suppose que  $e(t) = \mathcal{U}(t-1) - \mathcal{U}(t-2)$

où  $\mathcal{U}$  est la fonction échelon unité : 
$$\begin{cases} \mathcal{U}(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ \mathcal{U}(t) = 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

a) Tracer la courbe représentative de la fonction  $e$  dans un repère du plan.

b) Déterminer  $E(p)$ .

3°) **Dans la suite de l'exercice, on considère que  $L = 2$ ,  $R = 1000$  et  $C = 2 \cdot 10^{-6}$ .**

a) Vérifier que 
$$H(p) = \frac{500^2}{(p+250)^2 + (250\sqrt{3})^2}.$$

b) On admet que :

$$\frac{1}{p} H(p) = \frac{1}{p} - \frac{p+250}{(p+250)^2 + (250\sqrt{3})^2} - \frac{250}{(p+250)^2 + (250\sqrt{3})^2}.$$

Déterminer l'original  $h_1$  de la fonction  $p \mapsto \frac{1}{p} H(p)$ .

Exprimer  $s(t)$  à l'aide de  $h_1(t)$ .

c) Donner l'expression de  $s(t)$  sur chacun des intervalles  $] -\infty, 1[$ ,  $[1, 2[$  et  $[2, +\infty[$ .

## PARTIE B

On rappelle que  $H(p) = \frac{500^2}{(p + 250)^2 + (250\sqrt{3})^2}$ .

1°) On considère la fonction  $r$  définie pour tout réel  $\omega > 0$  par :

$$r(\omega) = |H(j\omega)|$$

où  $j$  est le nombre complexe de module 1 et d'argument  $\frac{\pi}{2}$ .

Montrer que  $r(\omega) = \frac{500^2}{\sqrt{\omega^4 - 500^2 \omega^2 + 500^4}}$ .

2°) On considère la fonction  $f$  définie pour tout réel  $\omega > 0$  par :

$$f(\omega) = \omega^4 - 500^2 \omega^2 + 500^4.$$

Montrer que  $f'(\omega) = 4\omega(\omega - 250\sqrt{2})(\omega + 250\sqrt{2})$ .

3°) Montrer que  $r'(\omega)$  est du signe de  $-f'(\omega)$ .

4°) En déduire que  $r(\omega)$  est maximal pour une valeur  $\omega_0$  de  $\omega$ . Donner la valeur de  $\omega_0$  et calculer  $r(\omega_0)$ .

La partie B permet de déterminer le maximum du gain pour le système étudié en régime harmonique.