Exercice 1 (9 *points)*

1. Soit la fonction numérique g définie sur $[\,0\,;\,\pi\,]$ par $g(t) = (1 + \cos^2 t)\sin^2 t$.
   a) Montrer que $g'(t) = 4\sin t\cos^3 t$.
   b) En déduire les variations de g sur $[\,0\,;\,\pi\,]$.

2. Soit la fonction numérique f définie sur **R**, paire, périodique de période 1 telle que :

$$\begin{cases} f(t) = \dfrac{1}{2} - \tau & \text{si } 0 \le t < \tau \\ f(t) = -\tau & \text{si } \tau \le t \le \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{où } \tau \text{ est un nombre réel tel que } 0 < \tau < \frac{1}{2}$$

   a) **Uniquement dans cette question,** on prendra $\tau = \dfrac{1}{6}$.
   Représenter la fonction f sur l'intervalle $[\,-1\;;\;1\,]$ dans un repère orthonormal.
   b) On admet que la fonction f satisfait aux conditions de Dirichlet.
   Soit S le développement en série de Fourier associé à la fonction f.
   Montrer que :

$$S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\pi}\sin(2n\pi\tau)\cos(2n\pi t)$$

3. On décide de ne conserver que les harmoniques de rang inférieur ou égal à 2.
   Soit la fonction numérique h définie sur **R** par :

$$h(t) = \frac{1}{\pi}\sin(2\pi\tau)\cos(2\pi t) + \frac{1}{2\pi}\sin(4\pi\tau)\cos(4\pi t).$$

   On désigne par E_h^2 le carré de la valeur efficace de h sur une période.
   a) À l'aide de la formule de Parseval, déterminer E_h^2.
   b) Montrer que $E_h^2 = \dfrac{1}{2\pi^2} g(2\pi\tau)$.

4. Déterminer la valeur de τ rendant E_h^2 maximal.

Exercice 2 (11 points)

L'exercice est composé de deux parties qui peuvent se traiter de façon indépendante.

Partie A

Un embrayage vient appliquer, à l'instant $t = 0$, un couple résistant constant sur un moteur dont la vitesse à vide est de 150 rad/s.

On note $\omega(t)$ la vitesse de rotation du moteur à l'instant t.

La fonction ω est solution de l'équation différentielle : $\dfrac{1}{200}y'(t) + y(t) = 146$ **(1)**

où y désigne une fonction dérivable de la variable réelle positive t.

1. a) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle **(1)**.
   On cherchera une solution particulière constante.

b) Sachant que $\omega(0) = 150$, montrer que $\omega(t) = 146 + 4\mathrm{e}^{-200\,t}$ pour tout $t \in [\ 0\ ;+\infty\ [$.

2. a) On note $\omega_\infty = \lim\limits_{t \to +\infty} \omega(t)$. Déterminer la perte de vitesse $\omega(0) - \omega_\infty$ due au couple résistant.

   b) On considère que la vitesse du moteur est stabilisée lorsque l'écart relatif $\left|\dfrac{\omega(t)-\omega_\infty}{\omega_\infty}\right|$ est inférieur à 1% .

   Calculer le temps mis par le moteur pour stabiliser sa vitesse.

   On donnera la valeur exacte et la valeur arrondie au millième.

Partie B

La vitesse du moteur étant stabilisée, on s'intéresse dans cette deuxième partie à l'effet d'une perturbation γ du couple résistant sur la vitesse de rotation du moteur.

On note $f(t)$ la différence, à l'instant t, entre la vitesse perturbée du moteur et sa vitesse stabilisée.

La fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{1}{200} f'(t) + f(t) = \gamma(t) \ \text{ avec } \ f(0^+) = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

On admet que la fonction f possède une transformée de Laplace notée F.

La fonction γ est définie par $\gamma(t) = K\left[U(t) - U(t-\tau)\right]$ où τ et K sont des réels strictement positifs caractérisant la perturbation et U est la fonction échelon unité ($U(t) = 0$ si $t < 0$ et $U(t) = 1$ si $t \geq 0$).

1. a) Représenter la fonction γ pour $\tau = 0{,}005$ et $K = 0{,}2$.

   b) Déterminer, en fonction de τ et K, la transformée de Laplace Γ de la fonction γ .

2. En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle **(2)**, déterminer $F(p)$.

3. a) Déterminer les réels a et b tels que $\dfrac{200}{p(p+200)} = \dfrac{a}{p} + \dfrac{b}{p+200}$ pour tout réel p strictement positif.

   b) En déduire l'original f de la fonction F . On vérifiera notamment que :

$$\begin{cases} f(t) = K\left(1 - \mathrm{e}^{-200\,t}\right) & \text{si } t \in [0\,;\tau[\\ f(t) = K\left(\mathrm{e}^{200\,\tau} - 1\right)\mathrm{e}^{-200\,t} & \text{si } t \in [\tau\,;+\infty[\end{cases}$$

   c) Donner le sens de variation de la fonction f sur chacun des intervalles $[\ 0\ ;\tau\ [$ et $[\ \tau\ ;+\infty\ [$.

   Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de ces deux intervalles.

   d) Représenter la fonction f pour $\tau = 0{,}005$ et $K = 0{,}2$.

   On pourra tracer les courbes représentatives des fonctions γ et f dans le même repère.